

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ**

Выпуск 8

Издание выходит с 2003 года

А. Н. Ширяев

О мартингалльных методах
в задачах о пересечении границ
броуновским движением



Москва
2007

УДК 519.216.5+519.216.8

ББК (В)22.171

С56

Редакционный совет:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов, В. С. Владимиров,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь),
А. А. Карацуба, В. В. Козлов, С. П. Коновалов, С. П. Новиков,
А. Н. Паршин (заместитель главного редактора),
Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев (главный редактор),
А. А. Славнов, Д. В. Трещёв, Е. М. Чирка*

С56 Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2007. Вып. 8: О мартингалных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением / Шириев А. Н. — 80 с.

ISBN 5-98419-020-6

Серия “Современные проблемы математики” — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-020-6

© Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2007
© Шириев А. Н., 2007

Содержание

§ 1. Введение. Вспомогательные результаты	5
§ 2. Свойства момента остановки $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}, a > 0$	23
§ 3. Свойства момента остановки $\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}, a > 0$	27
§ 4. Свойства момента остановки $\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : B_t - bt \geq a\}, a > 0$	31
§ 5. Свойства момента остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0 : B_t - bt \geq a\}, a > 0$	38
§ 6. О распределении $\sup B^\mu$ и $\sup B^\mu $ для броуновского движения B^μ со сносом	41
§ 7. О распределении $\sup \hat{B}$ и $\sup \hat{B} $ для броуновского мо- ста $\hat{B}$. Критерии Колмогорова и Смирнова	46
§ 8. О фундаментальных тождествах Вальда для броунов- ского движения	53
§ 9. Свойства момента остановки $\rho_c = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq -a + c\sqrt{t+b}\}, \text{ где } b \geq 0, a > c\sqrt{b}$	57
§ 10. Свойства момента остановки $\delta_c = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq c\sqrt{t+b}\}, b > 0$	59
§ 11. Свойства моментов остановки $\tau_{\geq b}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \geq b\}, \tau_{\leq a}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \leq a\}$ и $\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu \wedge \tau_{\geq b}^\mu$, где $a < 0 < b$	61
§ 12. Свойства момента остановки $\tau^\mu(H) = \inf\{t \geq 0 : \max_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu \geq H\}$ (связанного с падением на величину $H, H > 0$)	65
§ 13. Свойства момента остановки $\rho_a^{(3)} = \inf\{t \geq 0 : R_t^{(3)}(B) = a\}, a > 0$, где $R^{(3)}(B)$ – трехмерный процесс Бесселя $(R^{(3)}(B) = B + L(B))$	71
Список литературы	76

§ 1. Введение. Вспомогательные результаты

Основная цель настоящего издания, представленного в форме лекций, состоит в изложении мартингалльных методов в задачах, связанных с пересечением границ броуновским движением и броуновским движением со сносом.

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение ($E B_t = 0$, $E B_t^2 = t$), заданное на некотором фильтрованном вероятностном пространстве. Рассмотрим моменты остановки вида

$$\tau_g = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq g(t)\}, \quad \bar{\tau}_g = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq g(t)\}, \quad \dots,$$

где $g = g(t)$, $t \geq 0$, – некоторые границы.

Мы будем интересоваться описанием свойств распределений как моментов $\tau_g, \bar{\tau}_g, \dots$, так и других характеристик (типа $\sup B$, $\sup |B|, \dots$) броуновского движения, броуновского движения со сносом и броуновского моста.

Полезно отметить, что применяемые нами методы основаны, в сущности, лишь только на следующих четырех общих результатах:

- А. Теорема о преобразовании свободного выбора, называемая также
 - OS-теоремой (от англ. *optional sampling theorem*),
 - теоремой об остановке,
 - теоремой об опциональной остановке,
 - теоремой о сохранении свойства мартингалльности и субмартингалльности при замене времени на случайный момент;
- В. Принцип отражения;
- С. Теорема Гирсанова;
- Д. Теорема Леви (о совместном распределении B и $\sup B$) и ее обобщение.

В связи в этом представляется целесообразным напомнить эти классические результаты теории случайных процессов, приводя и их доказательства.

А. Теорема о преобразовании свободного выбора. Дадим сначала формулировку и доказательство теоремы о преобразовании свободного выбора в случае *дискретного времени* (см.

также [1], [2]). Затем мы сформулируем и докажем одну ее версию для случая непрерывного времени (см. также [3]).

1. Случай дискретного времени.

а) Пусть $X = (X_n)_{n \geq 0}$ – субмартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$, τ и σ – два конечных ($\mathbb{P}$ -н.н.) момента остановки таких, что $\mathbb{E} X_\sigma$ и $\mathbb{E} X_\tau$ определены (например, $\mathbb{E} |X_\sigma| < \infty$, $\mathbb{E} |X_\tau| < \infty$). Предположим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X_m^+ I(\tau > m)] = 0. \quad (1.1)$$

Тогда $\mathbb{P}$ -н.н.

$$\boxed{\mathbb{E} (X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau \wedge \sigma}}, \quad (1.2)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbb{E} (X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma \quad \text{на } \{\tau \geq \sigma\}, \quad \mathbb{P}\text{-н.н.} \quad (1.3)$$

б) Пусть $M = (M_n)_{n \geq 0}$ – мартингал, τ и σ – конечные ($\mathbb{P}$ -н.н.) моменты остановки такие, что $\mathbb{E} M_\sigma$ и $\mathbb{E} M_\tau$ определены (например, $\mathbb{E} |M_\sigma| < \infty$, $\mathbb{E} |M_\tau| < \infty$). Предположим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|M_m| I(\tau > m)] = 0. \quad (1.4)$$

Тогда $\mathbb{P}$ -н.н.

$$\boxed{\mathbb{E} (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}}, \quad (1.5)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbb{E} (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \quad \text{на } \{\tau \geq \sigma\}, \quad \mathbb{P}\text{-н.н.} \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. а). Нам надо доказать, что для любого множества $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma). \quad (1.7)$$

Для этого достаточно установить, что при любом $n \geq 0$

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n), \quad (1.8)$$

т.е. что для $B = A \cap \{\sigma = n\}$

$$\mathbb{E} X_\tau I(B, \tau \geq n) \geq \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n). \quad (1.9)$$

Итерациями по n получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau = n) + \mathbb{E} X_n I(B, \tau > n) \\ &\leq \mathbb{E} X_n I(B, \tau = n) + \mathbb{E} [\mathbb{E} (X_{n+1} | \mathcal{F}_n) I(B, \tau > n)] \\ &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau = n) + \mathbb{E} X_{n+1} I(B, \tau \geq n+1) \\ &= \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq n+1) + \mathbb{E} X_{n+1} I(B, \tau > n+1) \\ &\leq \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq n+1) + \mathbb{E} X_{n+2} I(B, \tau \geq n+2) \\ &\leq \dots \leq \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq m) + \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m) \end{aligned} \quad (1.10)$$

для $m \geq n$. Следовательно,

$$\mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq m) \geq \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m). \quad (1.11)$$

Мы предположили, что $\mathbb{E} X_\tau$ определено. Отсюда следует, что функция множеств $Q(C) = \mathbb{E} X_\tau I(C)$, $C \in \mathcal{F}$, счетно-аддитивна, и, значит, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq m)$ существует. Тогда из (1.11) и (1.1), переходя к пределу по $m \rightarrow \infty$, находим, что для конечных τ

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_\tau I(B, \tau \geq n) &\geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} [\mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m)] \\ &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m) \\ &\geq \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_m^+ I(B, \tau > m) \\ &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n), \end{aligned}$$

или

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \sigma = n, \tau \geq n) \geq \mathbb{E} X_n I(A, \sigma = n, \tau \geq n),$$

или

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n).$$

Отсюда для любого $k \geq 0$

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma, \sigma \leq k) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma, \sigma \leq k). \quad (1.12)$$

По предположению, $P(\sigma < \infty) = 1$. Поэтому, переходя в (1.12) к пределу по $k \rightarrow \infty$ и учитывая, что математические ожидания $E X_\tau$ и $E X_\sigma$ определены, получаем неравенство

$$E X_\tau I(A, \tau \geq \sigma) \geq E X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma),$$

которое в точности совпадает с (1.7), откуда и следует (1.2) (и (1.3)). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. б). Пусть $M = (M_n)_{n \geq 0}$ — мартингал, удовлетворяющий условию (1.4), что дает

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E [M_m^+ I(\tau > m)] = 0 \quad (1.13a)$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E [M_m^- I(\tau > m)] = 0. \quad (1.13b)$$

Применяя теорему о преобразовании свободного выбора из п. а) к субмартингалам $X_n = M_n$ и $X_n = -M_n$, $n \geq 0$, для которых $X_n^+ = M_n^+$ и $X_n^- = M_n^-$, находим, что

$$E (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq M_{\tau \wedge \sigma}, \quad (1.14)$$

а также

$$E (-M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq -M_{\tau \wedge \sigma}, \quad (1.15)$$

т.е.

$$E (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \leq M_{\tau \wedge \sigma}. \quad (1.16)$$

Из (1.14) и (1.16) получаем равенство (Р-п.н.)

$$E (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}. \quad \square \quad (1.17)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для некоторого конечного числа T выполнено условие $P(\tau \leq T) = 1$, то $E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau \wedge \sigma}$ в случае субмартингалов и $E(M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}$ в случае мартингалов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть семейства случайных величин $\{X_n^+, n \geq 0\}$ (в случае субмартингалов) или $\{|M_n|, n \geq 0\}$ (в случае мартингалов) равномерно интегрируемы, т.е.

$$\sup_n E [X_n^+ I(X_n^+ > c)] \rightarrow 0, \quad \sup_n E [|M_n| I(|M_n| > c)] \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Тогда выполнены условия (1.1) и (1.4) и (в предположении, что $E X_\sigma$, $E X_\tau$ и $E M_\sigma$, $E M_\tau$ определены) мы получаем утверждения (1.2) и (1.5). В частности, если $|X_n| \leq c$ для всех $n \geq 0$ и $|M_n| \leq c$ для всех $n \geq 0$, то свойства (1.2), (1.5) выполнены.

2. Случай непрерывного времени. В этом случае мы сформулируем и докажем только утверждения типа (1.2) и (1.5), и не в общих предположениях вида (1.1) и (1.4), а лишь при условиях, аналогичных сформулированным выше в следствиях 1 и 2.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство с непрерывной справа фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (т.е. $\mathcal{F}_t^+ \equiv \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$ для любого $t \geq 0$), пополненной множествами $\mathbb{P}$ -меры нуль из $\mathcal{F}$.

Все случайные процессы $X = (X_t)_{t \geq 0}$, которые мы будем рассматривать на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, предполагаются согласованными с $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (т.е. X_t является $\mathcal{F}_t$ -измеримым для любого $t \geq 0$) и имеющими непрерывные справа траектории.

α) Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – субмартингал, а σ и τ – два момента остановки, причем момент τ ограничен ($\tau \leq T$). Тогда случайная величина X_τ интегрируема и $\mathbb{P}$ -п.н.

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau \wedge \sigma}, \quad (1.18)$$

где $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – мартингал, а σ и τ – два момента остановки, причем τ ограничен ($\tau \leq T$). Тогда случайная величина M_τ интегрируема и $\mathbb{P}$ -п.н.

$$\mathbb{E}(M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}. \quad (1.19)$$

β) Свойства (1.18) и (1.19) выполняются также и для неограниченных τ , если семейства $(X_t^+)_{t \geq 0}$ и $(|M_t|)_{t \geq 0}$ равномерно интегрируемы (т.е. $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[X_t^+ I(X_t^+ > c)] \rightarrow 0$ и $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|M_t| I(|M_t| > c)] \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$).

Доказательство п. α) основано на рассмотрении следующих моментов остановки, принимающих счетное число значений:

$$\tau_n = 2^{-n} \lfloor 2^n \tau + 1 \rfloor, \quad \sigma_n = 2^{-n} \lfloor 2^n \sigma + 1 \rfloor$$

(таких, что $\tau_n \downarrow \tau$, $\sigma_n \downarrow \sigma$), и использовании утверждений (1.1) и (1.5) для соответствующих процессов с дискретным временем $X^n = (X_k)_{k \in 2^{-n}\mathbb{Z}_+}$ и $M^n = (M_k)_{k \in 2^{-n}\mathbb{Z}_+}$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$). На заключительном шаге мы положим $n \rightarrow \infty$.

Если момент τ ограничен, то по следствию 1

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}) \geq X_{\tau_n \wedge \sigma_n}.$$

При $m \rightarrow \infty$ мы получаем (используя теорему Леви о предельном переходе под знаком условных математических ожиданий и свойства непрерывности справа фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$), что

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau_n \wedge \sigma}. \quad (1.20)$$

Семейство $\{X_t, t \leq T\}$ равномерно интегрируемо. Тем самым, (1.18) следует из (1.20), если перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и заметить, что $X_{\tau_n \wedge \sigma} \rightarrow X_{\tau \wedge \sigma}$ в силу непрерывности справа процесса X .

Доказательство свойства (1.19) для случая мартингалов аналогично.

Чтобы доказать п. $\beta)$ для субмартингалов, надо заметить, что если субмартингал X равномерно интегрируем, то существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что

$$X_t \leq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \quad (1.21)$$

(это неравенство есть не что иное, как хорошо известное свойство Дуба замкнутости равномерно интегрируемых субмартингалов; см. [1, гл. VII, § 4, теорема 2]).

Используя свойство (1.21) и аппроксимируя τ и σ моментами τ_n и σ_n , предельным переходом по $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ получаем требуемое свойство (1.18). Аналогично доказывается и свойство (1.19).

В. Принцип отражения.

1. Пусть τ – конечный момент остановки. Тогда процесс $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ с

$$\tilde{B}_t = B_{t \wedge \tau} - (B_t - B_{t \wedge \tau}), \quad (1.22)$$

т.е.

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t, & t < \tau, \\ 2B_\tau - B_t, & t \geq \tau, \end{cases} \quad (1.23)$$

является броуновским движением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строго марковское свойство броуновского движения (см. [3], [6], [27]) утверждает, что процесс $B' = (B'_t)_{t \geq 0}$, где

$$B'_t = B_{t \wedge \tau} - B_\tau, \quad (1.24)$$

снова является броуновским движением и к тому же B' и (τ, B^τ) , где $B^\tau = (B_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$, независимы. Нетрудно показать, что

$$\tilde{B}_t = B_{t \wedge \tau} - B'_{(t-\tau)^+} \quad (1.25)$$

и

$$B_t = B_{t \wedge \tau} + B'_{(t-\tau)^+}. \quad (1.26)$$

В силу строго марковского свойства имеем

$$(B', \tau, B^\tau) \stackrel{\text{law}}{=} (-B', \tau, B^\tau).$$

Таким образом, $\tilde{B} \stackrel{\text{law}}{=} B$, а именно это и утверждает сформулированный принцип отражения. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Возьмем $\tau = \tau_x$, где $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq x\}$, $x > 0$. Тогда процесс

$$\tilde{B}_t = B_t I(t < \tau_x) + (2x - B_t) I(t \geq \tau_x), \quad t \geq 0,$$

является броуновским движением.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $x \geq y$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y \right\} &= \{\tau_x \leq T, B_T \leq y\} \\ &= \{\tau_x \leq T, 2x - \tilde{B}_T \leq y\} = \{\tau_x \leq T, \tilde{B}_T \geq 2x - y\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\{\tau_x > T, \tilde{B}_T \geq 2x - y\} = \emptyset$. Поэтому для $x \geq y$

$$\left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y \right\} = \{\tilde{B}_T \geq 2x - y\} \quad (1.27)$$

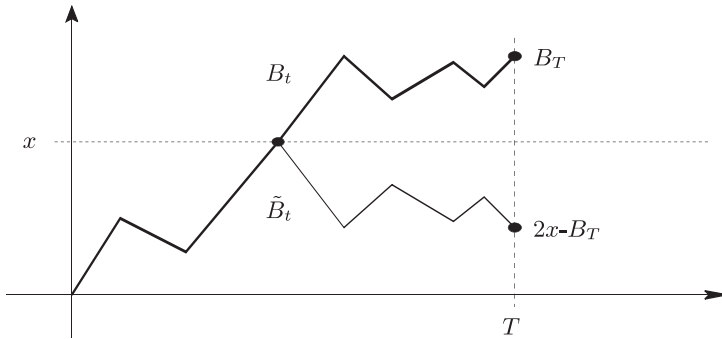
и

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y \right\}} = \mathbb{P}\{B_T \geq 2x - y\}, \quad (1.28a)$$

поскольку $\tilde{B} \stackrel{\text{law}}{=} B$. В частности,

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq x \right\}} = \mathbb{P}\{B_T \geq x\}. \quad (1.28b)$$

Очень часто именно это равенство называют **принципом отражения** для броуновского движения и иллюстрируют следующим рисунком.



(B – заданная траектория, $\tilde{B}$ – отраженная траектория)

2. ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство того, что процесс $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ является броуновским движением, можно легко получить из *характеризационной теоремы Леви* для броуновского движения. Согласно этой теореме, достаточно лишь убедиться в том, что процесс $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ является *непрерывным локальным мартингалом* и что его *квадратическая характеристика* $\langle \tilde{B} \rangle_t$ равна (Р-п.н.) t (см., например, [16], [5], [27]).

Из определения (1.22) понятно, что процесс $\tilde{B} = B^\tau - (B - B^\tau)$, где $B^\tau = (B_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$, является непрерывным локальным мартингалом, для которого

$$\langle \tilde{B} \rangle = \langle B^\tau \rangle + \langle B - B^\tau \rangle - 2\langle B^\tau, B - B^\tau \rangle.$$

Учитывая, что

$$B_t^\tau = \int_0^t I(s \leq \tau) dB_s, \quad B_t - B_t^\tau = \int_0^t [1 - I(s \leq \tau)] dB_s,$$

находим (Р-п.н.)

$$\langle B^\tau \rangle_t = t \wedge \tau, \quad \langle B - B^\tau \rangle_t = t - t \wedge \tau$$

и

$$\langle B^\tau, B - B^\tau \rangle_t = \int_0^t I(s \leq \tau) [1 - I(s \leq \tau)] ds = 0.$$

Поэтому $\langle \tilde{B} \rangle_t = t$ (Р-п.н.), $t \geq 0$.

С. Теорема Гирсанова для броуновского движения.

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство с фильтрацией и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение, заданное на этом пространстве.

Обозначим $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ – ограничение меры $\mathbb{P}$ на σ -алгебру $\mathcal{F}_T$, $T \in \mathbb{R}_+$, и пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ – броуновское движение со сносом: $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geq 0$.

На $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ введем *новую* вероятностную меру $\mathbb{P}_T^\mu$ с

$$d\mathbb{P}_T^\mu = e^{-\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} d\mathbb{P}_T, \quad (1.29)$$

или, эквивалентно,

$$d\mathbb{P}_T^\mu = e^{-\mu B_T^\mu + \frac{\mu^2}{2}T} d\mathbb{P}_T. \quad (1.30)$$

Классическая “теорема Гирсанова” утверждает¹, что

$$\boxed{\text{Law}(B_t^\mu, t \leq T | \mathbb{P}_T^\mu) = \text{Law}(B_t, t \leq T | \mathbb{P}_T)}. \quad (1.31)$$

Иначе говоря, относительно меры $\mathbb{P}_T^\mu$ процесс $(B_t^\mu)_{0 \leq t \leq T}$ (броуновское движение со сносом) ведет себя так же, как обычное броуновское движение (т.е. процесс $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$) относительно меры $\mathbb{P}_T$. В частности, если $G_T(x) = G_T(x_t, t \leq T)$ есть функционал на пространстве $C[0, T]$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \leq T}$, то

$$\boxed{\text{Law}(G_T(B^\mu) | \mathbb{P}_T^\mu) = \text{Law}(G_T(B) | \mathbb{P}_T)}. \quad (1.32)$$

Отсюда для “хороших” измеримых функционалов $G_T(x)$ (например, неотрицательных или ограниченных: $|G_T(x)| < \text{const}$ для всех $x \in C[0, T]$), используя свойство $\mathbb{P}_T \ll \mathbb{P}_T^\mu$ и (1.30), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} G_T(B^\mu) &= \mathbb{E}_T^\mu \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^\mu} G_T(B^\mu) = \mathbb{E}_T^\mu e^{\mu B_T^\mu - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B^\mu) \\ &= \mathbb{E} e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B), \end{aligned} \quad (1.33)$$

¹По поводу доказательства см., например, [5], [16], [27]. В [4] содержатся аналоги теоремы Гирсанова в общем виде – для семимартингалов и случайных мер.

где E_T^μ – математическое ожидание по мере P_T^μ . Таким образом, мы имеем следующую полезную формулу:

$$\boxed{E G_T(B^\mu) = E e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(B)} . \quad (1.34)$$

Из этой формулы непосредственно вытекает следующий важный результат о структуре производной Радона–Никодима *распределений вероятностей* процессов B и B^μ .

Обозначим Q_T^0 и Q_T^μ распределения вероятностей процессов $(B_t)_{t \leq T}$ и $(B_t^\mu)_{t \leq T}$ в пространстве $C[0, T]$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \leq T}$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}_T$:

$$Q_T^0(A) = P(B \in A), \quad Q_T^\mu(A) = P(B^\mu \in A), \quad A \in \mathcal{B}_T,$$

или, более наглядно,

$$Q_T^0 = \text{Law}(B | P), \quad Q_T^\mu = \text{Law}(B^\mu | P).$$

По формулам замены переменных в интеграле Лебега (для “хороших” функционалов G_T)

$$E G_T(B^\mu) = \int_{C[0, T]} G_T(x) Q_T^\mu(dx)$$

и

$$E e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(B) = \int_{C[0, T]} e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(x) Q_T^0(dx).$$

Поэтому согласно (1.34)

$$\int_{C[0, T]} G_T(x) Q_T^\mu(dx) = \int_{C[0, T]} e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(x) Q_T^0(dx).$$

Беря здесь $G_T(x) = I_A(x)$, получаем, что

$$Q_T^\mu(A) = \int_A e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T} Q_T^0(dx), \quad A \in \mathcal{B}_T. \quad (1.35)$$

Тем самым, мера Q_T^μ абсолютно непрерывна относительно меры Q_T^0 и производная Радона–Никодима $Z_T^{(\mu)}(x) = \frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(x)$ задается формулой (Q_T^0 -п.н.)

$$\boxed{Z_T^{(\mu)}(x) = e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T}} . \quad (1.36)$$

Отсюда, беря $x = B = (B_t(\omega))_{t \leq T}$, находим, что (Р-п.н.)

$$\boxed{\frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(B) = e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T}}. \quad (1.37)$$

В приведенном изложении предполагалось, что процессы B и B^μ определены на конечном временном интервале $[0, T]$. Рассмотрим теперь случай бесконечного интервала $[0, \infty)$.

Будем считать, что рассматриваемые процессы B и B^μ определены на $[0, \infty)$:

$$B = (B_t)_{t \geq 0}, \quad B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}.$$

Обозначим через Q^0 и Q^μ распределения вероятностей процессов B и B^μ в пространстве $C[0, \infty)$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \geq 0}$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}(C[0, \infty))$:

$$Q^0(A) = P(B^0 \in A), \quad Q^\mu(A) = P(B^\mu \in A), \quad A \in \mathcal{B}_\infty.$$

Через $Q^0|_{\mathcal{B}_T}$ и $Q^\mu|_{\mathcal{B}_T}$ будем обозначать сужения мер Q^0 и Q^μ на σ -алгебру $\mathcal{B}_T = \sigma(x : x_s, s \leq T)$, порожденную ограничениями, наложенными на $x = (x_s)_{s \geq 0}$ на временном интервале $[0, T]$. Приведенный выше результат о структуре производной Радона–Никодима $\frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(x)$ обобщается на случай мер Q^μ и Q^0 следующим образом: при любом $T \geq 0$ (Q^0 -п.н.)

$$\boxed{\frac{d(Q^\mu|_{\mathcal{B}_T})}{d(Q^0|_{\mathcal{B}_T})}(x) = Z_T^{(\mu)}(x)}. \quad (1.38)$$

(Подробнее о структуре производных Радона–Никодима, в частности для процессов Ито и диффузионных процессов, см. [5], [4].)

2. Вернемся к формуле (1.34). Исходным моментом при ее получении была формула (1.29), определяющая по исходной мере P и функции $Z_T^{(-\mu)}(B)$ новую вероятностную меру P_T^μ , обладающую тем свойством, что относительно нее (по теореме Гирсанова) процесс $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \leq T}$ распределен как стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \leq T}$ (см. (1.31)).

Естественно задать вопрос о том, а как же построить соответствующую меру (скажем, P_∞^μ) для случая $T = \infty$.

В том случае, когда $T < \infty$, математическое ожидание $E Z_T^{(-\mu)}(B) = 1$ и формула (1.29) действительно определяет вероятностную меру. Но просто положить $T = \infty$ в равенстве $E Z_T^{(-\mu)}(B) = 1$ мы не можем, поскольку хотя предел $Z_\infty^{(-\mu)}(B) = \lim_{T \rightarrow \infty} Z_T^{(-\mu)}(B)$ и существует, но он с вероятностью единица равен нулю. Более того, даже для *конечных* с вероятностью единица марковских моментов τ может оказаться, что $E Z_\tau^{(-\mu)} < 1$. Тем самым, для переноса формулы (1.29) с детерминированных моментов T на случайные τ нужно, по крайней мере, выполнение свойства $E Z_\tau^{(-\mu)} = 1$.

3. Следующие общие рассмотрения показывают, как правильно здесь ставить вопрос о построении новых вероятностных мер на бесконечном временном интервале.

Предположим, что на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ задан неотрицательный мартингал $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ с $Z_0 = 1$. Спрашивается, существует ли на $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ с $\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_t$ вероятностная мера $\tilde{P}$ такая, что ее ограничения $\tilde{P}|_{\mathcal{F}_t}$ определяются при каждом $t \geq 0$ равенствами

$$(\tilde{P}|_{\mathcal{F}_t})(A) = \int_A Z_t d(P|_{\mathcal{F}_t}), \quad A \in \mathcal{F}_t. \quad (1.39)$$

Ответ на этот вопрос заведомо положителен в предположении, что выполнены некоторые условия *регулярности* исходного фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$. Так, например, если Ω есть пространство $D(\mathbb{R}_+)$ (непрерывных справа и имеющих пределы слева [càdlàg] функций) или пространство $C(\mathbb{R}_+)$ (непрерывных функций) и семейство $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ соответствующих борелевских σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, непрерывно справа и пополнено по мере P , то мера $\tilde{P}$ со свойствами (1.39) существует. (Доказательство см., например, в [3, гл. 16].)

При этом если σ – момент остановки, то для каждого множества $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\tilde{P}(A \cap \{\sigma < \infty\}) = E[Z_\sigma I(A \cap \{\sigma < \infty\})]. \quad (1.40)$$

Доказательство этого утверждения можно получить из теоремы о преобразовании свободного выбора (для ограниченных моментов остановки). Действительно, для любого $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t$ мы имеем по определению меры $\tilde{P}$ и свойству (1.6), что

$$\tilde{P}(A) = E[Z_t I(A)] = E[Z_{t \wedge \sigma} I(A)].$$

Если $A \in \mathcal{F}_\sigma$, то $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_{t \wedge \sigma}$ и из (1.12) следует, что

$$\tilde{\mathbb{P}}(A \cap \{\sigma \leq t\}) = \mathbb{E}[Z_\sigma I(A \cap \{\sigma \leq t\})]. \quad (1.41)$$

По теореме о монотонной сходимости, соотношение (1.36) получается из (1.41) при $t \rightarrow \infty$.

4. Рассмотрим сейчас мартингал

$$Z_t = e^{-\mu B_{t \wedge \tau} - \frac{\mu^2}{2}(t \wedge \tau)}, \quad t \geq 0, \quad (1.42)$$

где τ – момент остановки такой, что $\mathbb{E} Z_\tau = 1$.

В этом случае мера $\tilde{\mathbb{P}}$ может быть построена естественным образом:

$$d\tilde{\mathbb{P}} = Z_\tau d\mathbb{P}. \quad (1.43)$$

Соответствующее утверждение *теоремы Гирсанова* состоит в том, что процесс

$$\tilde{B}_t^\mu = B_t + \mu(t \wedge \tau) \quad (1.44)$$

является броуновским движением относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$. (Доказательство см. в упомянутых уже книгах [5], [16], [4], [27].) Из этой формулы мы видим, что на множестве $\{\tau < \infty\}$

$$\text{Law}(\tilde{B}^\mu \mid \tilde{\mathbb{P}}) = \text{Law}(B \mid \mathbb{P}). \quad (1.45)$$

Точнее, для любого, скажем, ограниченного или неотрицательно-го $\mathcal{F}_\tau$ -измеримого функционала $G_\tau(\cdot)$

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[G_\tau(\tilde{B}^\mu) I(\tau < \infty)] = \mathbb{E}[G_\tau(B) I(\tau < \infty)], \quad (1.46)$$

где $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ – математическое ожидание по мере $\tilde{\mathbb{P}}$.

Аналогично (1.33) из (1.46) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)] &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[e^{\mu B_\tau^\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[e^{\mu \tilde{B}_\tau^\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(\tilde{B}^\mu) I(\tau < \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(B) I(\tau < \infty)\right]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Следовательно, если $\mathbb{E} e^{-\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} = 1$, то (ср. (1.34))

$$\boxed{\mathbb{E}[G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)] = \mathbb{E}\left[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(B) I(\tau < \infty)\right]}. \quad (1.48)$$

Д. Теорема Леви (о совместном распределении B и $\sup B$) и ее обобщение.

1. Классическая *теорема Леви* утверждает, что для броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$ выполнено следующее замечательное свойство (см., например, [16], [27]):

$$\left(\sup B - B, \sup B \right) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B)), \quad (1.49)$$

где $L(B) = (L_t(B))_{t \geq 0}$ – локальное время в нуле:

$$L_t(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.50)$$

(Предел при $\varepsilon \downarrow 0$ в (1.50) существует Р-п.н.)

Свойство (1.49) допускает обобщение и на случай броуновского движения со сносом $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$, где $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Именно, в [25] показано, что

$$\left(\sup B^\mu - B^\mu, \sup B^\mu \right) \stackrel{\text{law}}{=} (|X^\mu|, L(X^\mu)), \quad (1.51)$$

где $X^\mu = (X_t^\mu)_{t \geq 0}$ – процесс, допускающий стохастический дифференциал

$$dX_t^\mu = -\mu \operatorname{sign} X_t^\mu dt + dB_t, \quad X_0^\mu = 0. \quad (1.52)$$

(Стохастическое дифференциальное уравнение (1.52) имеет и притом единственное сильное решение, т.е. такое, что при каждом $t \geq 0$ величины X_t^μ являются $\mathcal{F}_t^B \equiv \sigma(B_s, s \leq t)$ -измеримыми. Процесс X^μ хорошо известен в теории оптимального стохастического управления под названием “bang-bang process”).

В (1.51) $L(X^\mu) = (L_t(X^\mu))_{t \geq 0}$ есть локальное время процесса X^μ в нуле, определяемое формулой (1.50) с заменой B на X^μ .

2. Стандартное доказательство свойства (1.49) основано на применении *леммы Скорохода*, приводимой ниже. Если считать доказанным утверждение (1.49), то свойство (1.51) может быть установлено применением теоремы Гирсанова (для броуновского движения со сносом B^μ и для процесса X^μ). Именно такой путь доказательства свойства (1.51) был предложен в работе [25], и мы его приведем в п. 5. Оказывается, однако, что лемма Скорохода “работает” не только в случае броуновского движения, но и в случае броуновского движения со сносом. Иначе говоря, эта

лемма сразу дает доказательство свойства (1.51) и для $\mu = 0$, и для $\mu \neq 0$. (Такой путь был применен в работе [26].)

3. ЛЕММА СКОРОХОДА. Пусть $y = (y_t)_{t \geq 0}$ – непрерывная функция такая, что $y_0 \geq 0$. Тогда существует единственная пара функций $(x, l) = ((x_t, l_t))_{t \geq 0}$ такая, что

- (a) $x = y + l$;
- (b) $x \geq 0$;
- (c) $l = (l_t)_{t \geq 0}$ есть неубывающая непрерывная функция, $l_0 = 0$, такая, что носитель меры $dl = (dl_t)_{t \geq 0}$ совпадает с множеством $\{t \geq 0 : x_t = 0\}$.

Более того, функция $l = (l_t)_{t \geq 0}$ задается формулами

$$l_t = \sup_{s \leq t} (-y_s \vee 0), \quad t \geq 0. \quad (1.53)$$

(Доказательство см. в [28] или в [16, гл. VI, § 2, (2.1)].)

4. Дадим доказательство свойства (1.51) для любого $\mu \in \mathbb{R}$, основываясь на сформулированной лемме.

Применяя формулу Танака (см. [16], [27]) к процессу $X^\mu = (X_t^\mu)_{t \geq 0}$, находим, что

$$|X_t^\mu| = \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu + L_t(X^\mu). \quad (1.54)$$

Обозначая

$$Y_t^\mu = - \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu, \quad (1.55)$$

получаем, что

$$|X_t^\mu| = -Y_t^\mu + L_t(X^\mu). \quad (1.56)$$

Применяя теперь лемму Скорохода, видим, что, согласно (1.53), $L_t(X^\mu)$ непременно имеет следующий вид:

$$L_t(X^\mu) = \sup_{s \leq t} Y_s^\mu, \quad (1.57)$$

и, значит, (1.56) может быть представлено как

$$|X_t^\mu| = \sup_{s \leq t} Y_s^\mu - Y_t^\mu. \quad (1.58)$$

Из (1.57) и (1.58) находим, что для каждого $t \geq 0$ справедливо соотношение

$$\left(\sup_{s \leq t} Y_s^\mu - Y_t^\mu, \sup_{s \leq t} Y_s^\mu \right) = (|X_t^\mu|, L_t(X^\mu)). \quad (1.59)$$

Далее, из (1.55) и (1.52)

$$Y_t^\mu = - \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu = \mu t - \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dB_s. \quad (1.60)$$

Здесь процесс $(-\int_0^t \text{sign } X_s^\mu dB_s)_{t \geq 0}$ является непрерывным мартингалом, квадратическая характеристика которого

$$\left\langle - \int_0^\cdot \text{sign } X_s^\mu dB_s \right\rangle_t = t.$$

Следовательно, по характеризационной теореме Леви для броуновского движения (см. п. 2 раздела В (с. 12)),

$$\text{Law}\left(- \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dB_s; t \geq 0\right) = \text{Law}(B_t; t \geq 0).$$

Значит,

$$\text{Law}(Y_t^\mu; t \geq 0) = \text{Law}(B_t; t \geq 0),$$

и из (1.59) находим, что для каждого $t \geq 0$

$$\left(\sup_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu, \sup_{s \leq t} B_s^\mu\right) \stackrel{\text{law}}{=} (|X_t^\mu|, L_t(X^\mu)). \quad (1.61)$$

В силу произвольности $t \geq 0$ из (1.61) получаем требуемое свойство (1.51) для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ и, в частности, для $\mu = 0$.

5. Покажем сейчас, как можно было бы получить свойство (1.51) для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ из свойства (1.49) для $\mu = 0$ и теоремы Гирсанова.

Согласно (1.34), для всякого $T > 0$ и “хороших” функционалов $G_T(\cdot, \cdot)$ (скажем, измеримых и ограниченных)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} G_T\left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu\right) \\ = \mathbb{E} e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T\left(\sup_{s \leq T} B_s - B_T, \sup_{s \leq T} B_s\right). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из свойства (1.49) заключаем, что

$$\left(B_T, \sup_{s \leq T} B_s - B_T, \sup_{s \leq T} B_s\right) \stackrel{\text{law}}{=} (L_T(B) - |B_T|, |B_T|, L_T(B)). \quad (1.63)$$

Из (1.62) и (1.63) видим, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} G_T \left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu \right) \\ &= \mathbb{E} e^{\mu(L_T(B) - |B_T|) - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(|B_T|, L_T(B)). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Для доказательства свойства (1.51) достаточно показать, что для всякого $T > 0$

$$\mathbb{E} G_T \left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu \right) = \mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно проверить лишь, что $\mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu))$ совпадает с правой частью в (1.64).

С этой целью по аналогии с (1.29) и (1.30) введем вероятностную меру $\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu$ с

$$d\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu = e^{\mu \int_0^T \text{sign } X_s^\mu dB_s - \frac{\mu^2}{2} T} d\mathbb{P}_T, \quad (1.65)$$

что в силу (1.52) эквивалентно равенству

$$d\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu = e^{\mu \int_0^T \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu + \frac{\mu^2}{2} T} d\mathbb{P}_T. \quad (1.66)$$

Теорема Гирсанова, в применении к (диффузионному) процессу X^μ , утверждает (см. [4], [5], [27]), что

$$\text{Law}(X_t^\mu, t \leq T \mid \widehat{\mathbb{P}}_T^\mu) = \text{Law}(B_t, t \leq T \mid \mathbb{P}_T) \quad (1.67)$$

(ср. (1.31)).

Используя это свойство и (1.65), находим (ср. (1.33)), что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) &= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu} \frac{d\mathbb{P}_T}{d\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) \\ &= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu} e^{-\mu \int_0^T \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) \\ &= \mathbb{E} e^{-\mu \int_0^T \text{sign } B_s dB_s - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(|B_T|, L_T(B)). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Пользуясь формулой Танака для броуновского движения (см. (1.54) для $\mu = 0$ и [16], [27]), получаем, что (P-п.н.)

$$|B_T| = \int_0^T \text{sign } B_s dB_s + L_T(B). \quad (1.69)$$

Из (1.68) и (1.69)

$$\mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) = \mathbb{E} e^{\mu(L_T(B) - |B_T|) - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(|B_T|, L_T(B)). \quad (1.70)$$

Сопоставление (1.70) с (1.64) показывает, что для всякого $T > 0$ и достаточно “хороших” измеримых функционалов $G_T(\cdot, \cdot)$ выполнено соотношение

$$\mathbb{E} G_T\left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu\right) = \mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)). \quad (1.71)$$

В качестве “хороших” функционалов можно взять индикаторы множеств. Тем самым из (1.71) получаем требуемое соотношение (1.51).

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 1).

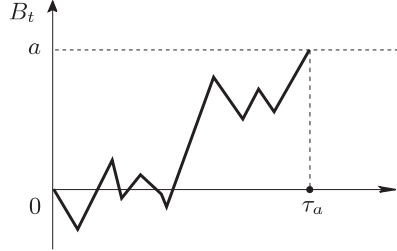
1. Дать доказательство того, что если субмартингал $X = (X_t)_{t \geq 0}$ равномерно интегрируем, то существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что $X_t \leq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$ (Р-п.н.), $t \geq 0$.
2. Проверить, что выполняются свойства (1.25) и (1.26).
3. Основываясь на характеризационной теореме Леви (см. замечание в п. 2 раздела В), восстановить детали доказательства того, что процесс $\tilde{B}$ является броуновским движением (см. об этом конец раздела В).
4. Дать доказательство *теоремы Гирсанова* (1.31), использующее метод характеристических функций.
5. Проанализировать доказательство существования меры $\tilde{\mathbb{P}}$ со свойством $d(\tilde{\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t) = Z_t d(\mathbb{P} | \mathcal{F}_t)$ (см. (1.39)), данное в [3, гл. 16].
6. Доказать, что процесс $\tilde{B}^\mu$, заданный в (1.44), является *броуновским движением* относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$.
7. Обосновать первые равенства в (1.33) и (1.47).
8. Доказать, что процесс $(\Phi(B_t/\sqrt{1-t}))_{0 \leq t \leq 1}$ является мартингалом. (Здесь и далее используются стандартные обозначения $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.)
9. Дать доказательство *леммы Скорохода*, приведенной (без доказательства) в п. 3 раздела D (с. 19).

§ 2. Свойства момента остановки

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}, \quad a > 0$$

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} P(\tau_a < \infty) &= 1, \quad E \tau_a = \infty \\ E e^{-\lambda \tau_a} &= e^{-a\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda \geq 0 \\ p_{\tau_a}(t) &= \frac{a\varphi_t(a)}{t} \end{aligned}$$



здесь $\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$, $p_{\tau_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(\tau_a \leq t)$, $0 < t < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda > 0$ и рассмотрим мартингал

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}, \quad t \geq 0,$$

для которого, очевидно, $E M_t = 1$, $t \geq 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$E M_{\tau_a \wedge t} = 1 \tag{2.1}$$

для любого $t \geq 0$. Очевидно, что

$$0 \leq M_{\tau_a \wedge t} \leq e^{\lambda B_{\tau_a \wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_a \wedge t)} \leq e^{\lambda a}.$$

Тогда, по теореме о мажорируемой сходимости для интеграла Лебега, из (2.1) находим, что

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} E M_{\tau_a \wedge t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[E e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a \leq t) + E e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} I(\tau_a > t) \right] \\ &= E e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a < \infty) + \lim_{t \rightarrow \infty} E e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} I(\tau_a > t). \end{aligned}$$

Для всех $\lambda \neq 0$ (по усиленному закону больших чисел для броуновского движения) Р-п.н.

$$e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} = e^{t\left(\lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2}\right)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для всякого $\lambda > 0$

$$1 = \mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} I(\tau_a < \infty) = \mathbb{E} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} I(\tau_a < \infty), \quad (2.2)$$

и, снова по теореме о мажорируемой сходимости, при $\lambda \downarrow 0$ мы получаем из (2.2), что

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1. \quad (2.3)$$

Отсюда и из (2.2) находим

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = \mathbb{E} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = 1,$$

т.е.

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = e^{-\lambda a},$$

что дает следующее представление для преобразования Лапласа:

$$\boxed{\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}}. \quad (2.4)$$

Поскольку $\mathbb{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$, то формула (2.4) очевидно справедлива и при $\lambda = 0$. Прямые вычисления показывают, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{a\varphi_t(a)}{t} dt = e^{-a\sqrt{2\lambda}}}. \quad (2.5)$$

Этим, с учетом (2.4), доказано, что вероятность $\mathbb{P}(\tau_a \leq t)$ имеет плотность $p_{\tau_a}(t) = \frac{\partial \mathbb{P}(\tau_a \leq t)}{\partial t}$, задаваемую формулой

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a\varphi_t(a)}{t}$$

или, подробнее,

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}. \quad \square \quad (2.6)$$

2. Ясно, что

$$\{\tau_a \leq t\} = \left\{ \sup_{s \leq t} B_s \geq a \right\}. \quad (2.7)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a\right) = \mathbf{P}(\tau_a \leq t) = \int_0^t \frac{a\varphi_s(a)}{s} ds. \quad (2.8)$$

Заметим, что

$$\int_0^t \frac{a\varphi_s(a)}{s} ds = 2 \int_a^\infty \varphi_t(x) dx. \quad (2.9)$$

[Для доказательства этого соотношения достаточно рассмотреть производные по t левой и правой части и воспользоваться тем, что $\varphi_t(x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2}.] \quad (2.10)$$

Рассмотрим правую часть (2.9):

$$2 \int_a^\infty \varphi_t(x) dx = 2 \mathbf{P}(B_t \geq a) = \mathbf{P}(|B_t| \geq a).$$

Из (2.8) имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a\right) = 2 \mathbf{P}(B_t \geq a) \quad (2.11)$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a, B_t \leq a\right) = \mathbf{P}(B_t \geq a), \quad (2.12)$$

что, как уже указывалось выше (см. (1.28b)), есть один из вариантов *принципа отражения*.

Следовательно, мы можем утверждать, что из теоремы о преобразовании свободного выбора следует принцип отражения (2.12):

теорема о преобразовании свободного выбора	$\implies$	принцип отражения (2.12)	(2.13)
--	------------	--------------------------------	--------

Отметим также, что преобразование Лапласа $\mathbf{E} e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ можно легко получить из принципа отражения (2.11). В самом

деле, из (2.11) имеем $P(\tau_a \leq t) = P(\sup_{s \leq t} B_s \geq a) = 2P(B_t \geq a) = 2 \int_a^\infty \varphi_t(x) dx$.

Следовательно, с учетом (2.10),

$$\begin{aligned} p_{\tau_a}(t) &= \frac{\partial P(\tau_a \leq t)}{\partial t} = 2 \int_a^\infty \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} dx \\ &= \int_a^\infty \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2} dx = - \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \Big|_{x=a} = a \frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial t}, \end{aligned}$$

откуда выводится, что $P(\tau_a < \infty) = 1$, $E \tau_a = \infty$ и $E e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$.

3. Пусть $a < 0 < b$ и $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. Тогда, по теореме о преобразовании свободного выбора, $E B_{t \wedge \tau} = 0$, и, поскольку $P(\tau = \infty) = 0$ (докажите это (!)), теорема о мажорируемой сходимости дает

$$0 = a P(\tau_a < \tau_b) + b P(\tau_b < \tau_a). \quad (2.14)$$

Вместе со свойством

$$P(\tau_a < \tau_b) + P(\tau_b < \tau_a) = 1$$

равенство (2.14) приводит к следующим знаменитым формулам:

$$P(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \quad (2.15)$$

$$P(\tau_b < \tau_a) = \frac{|a|}{b-a}. \quad (2.16)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 2).

1. Проверить справедливость формулы (2.5).
2. Дать доказательство формулы (2.9).
3. Найти распределение и преобразование Лапласа момента остановки $\tau_a^1 = \inf\{t \geq 1 : B_t = a\}$.
4. Доказать использованное в п. 3 равенство $P(\tau = \infty) = 0$.

§ 3. Свойства момента остановки

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}, \quad a > 0$$

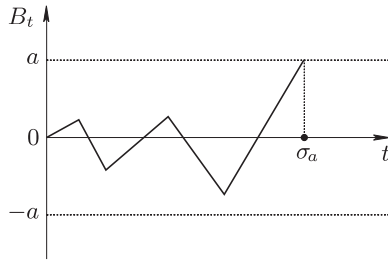
ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$P(\sigma_a < \infty) = 1, \quad E\sigma_a = a^2$$

$$E e^{-\lambda \sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda})} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}$$

$$p_{\sigma_a}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a(1+2k)}{t} \varphi_t(a(1+2k))$$

Здесь $p_{\sigma_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(\sigma_a \leq t)$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\sigma_a \leq \tau_a$ (Р-п.н.), и поэтому $P(\sigma_a < \infty) = P(\tau_a < \infty) = 1$, где $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ (см. §2).

Чтобы доказать равенство $E\sigma_a = a^2$, рассмотрим мартингал $M_t = B_t^2 - t$, $t \geq 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора (следствие 1 на с. 8) $EM_{t \wedge \sigma_a} = 0$ или, что то же, $EB_{t \wedge \sigma_a}^2 = E(t \wedge \sigma_a)$. Здесь $B_{t \wedge \sigma_a}^2 \leq a^2$. В силу теоремы о мажорируемой сходимости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E B_{t \wedge \sigma_a}^2 = E B_{\sigma_a}^2 = a^2, \quad (3.1)$$

а по теореме о монотонной сходимости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t \wedge \sigma_a) = E\sigma_a. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1) и (3.2) доказывают, что $E\sigma_a = a^2$.

Чтобы найти преобразование Лапласа для распределения момента σ_a , рассмотрим мартингал $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Здесь $0 < M_{t \wedge \sigma_a} \leq e^{\lambda a}$, и, по теореме о мажорируемой сходимости, в силу свойств

$$P(B_{\sigma_a} = a) = P(B_{\sigma_a} = -a) = \frac{1}{2}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} E M_{t \wedge \sigma_a} = E M_{\sigma_a} \\ &= E e^{\lambda B_{\sigma_a} - \frac{\lambda^2}{2} \sigma_a} = \frac{e^{\lambda a} + e^{-\lambda a}}{2} E e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sigma_a}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda a)}, \quad (3.3)$$

где $\operatorname{ch}(\lambda a) = (e^{\lambda a} + e^{-\lambda a})/2$. Из (3.3) находим собственно преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \sigma_a} &= \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda})} = \frac{2e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{1 + 2e^{-\sqrt{2\lambda}a}} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из § 2 мы знаем (см. (2.4), (2.5)), что для любого $A > 0$

$$e^{-A\sqrt{2\lambda}} = E e^{-\lambda \tau_A} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p_{\tau_A}(t) dt,$$

где $p_{\tau_A}(t) = A\varphi_t(A)/t$.

Полагая здесь $A = (1+2k)a$ с $k = 0, 1, 2, \dots$, из (3.4) находим, что

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \sigma_a} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(1+2k)a}{t} \varphi_t((1+2k)a) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+2k)a}{t} \varphi_t((1+2k)a) \right\} dt. \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что

$$p_{\sigma_a}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+2k)a}{t} \varphi_t((1+2k)a),$$

или

$$p_{\sigma_a}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p_{\tau_{a(1+2k)}}(t),$$

что дает

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sigma_a \leq t) &= \int_0^t p_{\sigma_a}(s) ds = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t p_{\tau_{a(1+2k)}}(s) ds \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}(\tau_{a(1+2k)} \leq t) \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}(B_t \geq a(1+2k)) \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[1 - \Phi\left(\frac{a(1+2k)}{\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формула (3.5) вместе с соотношением

$$\mathbf{P}(\sigma_a \leq t) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq a\right)$$

позволяют, в принципе, найти

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq t} |B_s| \left(= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq a\right) da = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\sigma_a \leq t) da \right).$$

Однако легче это математическое ожидание найти с помощью следующих рассуждений.

Пусть, для простоты, $t = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sigma_a \geq 1) &= \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} |B_s| \leq a\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq a^{-2}} |B_s| \leq 1\right) = \mathbf{P}(\sigma_1 \geq a^{-2}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} |B_s| \leq a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \leq a\right), \quad (3.7)$$

т.е.

$$\text{Law}\left(\sup_{s \leq t} |B_s|\right) = \text{Law}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\right).$$

Учитывая, что (в силу свойств нормального распределения) для каждого $\Delta > 0$ справедливо соотношение

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/(2\Delta^2)} dx,$$

используя (3.3) и полагая $\Delta = 1/\sqrt{\sigma_1}$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{s \leq 1} |B_s| &= \mathbf{E} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{E} e^{-x^2 \sigma_1/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \\ &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} y \Big|_1^\infty \\ &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq T} |B_s| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} T. \quad (3.8)$$

(Заметим, между прочим, что $\mathbf{E} |B_T| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T$.)

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием §3).

1. Найти асимптотику плотностей вероятностей $p_{\sigma_a}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.
2. Найти $\mathbf{E} \sup_{s \leq t} |B_s|$, пользуясь формулами (3.6) и (3.5).
3. Найти явный вид для $\mathbf{E} (\sup_{s \leq t} |B_s|)^n$ для всех целых $n > 1$, пользуясь свойством (3.8).

§ 4. Свойства момента остановки

$$\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : B_t - bt \geq a\}, \quad a > 0$$

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

Для $b \leq 0$:

$$P(\tau_{ab} < \infty) = 1,$$

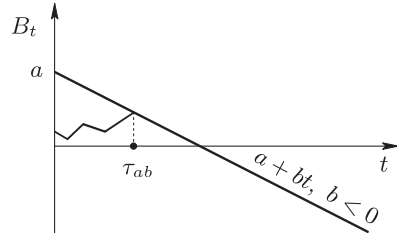
$$E \tau_{ab} = \frac{a}{|b|},$$

$$E B_{\tau_{ab}} = 0,$$

$$E e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})},$$

где $\lambda \geq 0$

$$p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt)$$



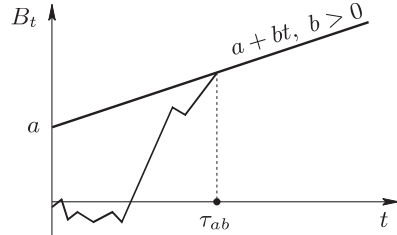
Для $b > 0$:

$$P(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab},$$

$$E \tau_{ab} = \infty,$$

$$E e^{-\lambda \tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0$$

$$p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt)$$



Здесь $\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/(2t)}$, $p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(\tau_{ab} \leq t)$, $0 < t < \infty$.

2. Случай $b \leq 0$.

Если $b = 0$, то $\tau_{ab} = \tau_a$ и $P(\tau_{ab} < \infty) = P(\tau_a < \infty) = 1$ в силу §2.

Если $b < 0$, то $\tau_{ab} < \tau_a$ (P-п.н.) и $P(\tau_{ab} < \infty) = 1$, поскольку $P(\tau_a < \infty) = 1$.

Для любого $t \geq 0$ по теореме о преобразовании свободного выбора

$$E B_{t \wedge \tau_{ab}} = 0. \quad (4.1)$$

Ясно, что

$$B_{t \wedge \tau_{ab}} \leq a + b(t \wedge \tau_{ab}). \quad (4.2)$$

Отсюда и из (4.1)

$$0 \leq a + b \mathbb{E}(t \wedge \tau_{ab}),$$

что дает (для $b < 0$)

$$\mathbb{E}(t \wedge \tau_{ab}) \leq \frac{a}{|b|}. \quad (4.3)$$

По теореме о монотонной сходимости,

$$\mathbb{E} \tau_{ab} \leq \frac{a}{|b|}. \quad (4.4)$$

Покажем, что на самом деле здесь имеет место равенство:

$$\mathbb{E} \tau_{ab} = \frac{a}{|b|}, \quad (4.5)$$

и также покажем, что

$$\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0. \quad (4.6)$$

С этой целью рассмотрим мартингал $M_t = e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}$, где $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора имеем

$$\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = 1,$$

и поскольку

$$0 \leq M_{t \wedge \tau_{ab}} \leq e^{ab + \sqrt{b^2 + \lambda}},$$

по теореме о мажорируемой сходимости получаем:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[I(\tau_{ab} < \infty) e^{\theta B_{t \wedge \tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}(t \wedge \tau_{ab})} + I(\tau_{ab} = \infty) e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t} \right] \\ &= \mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = \mathbb{E} e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда

$$\mathbb{E} e^{\theta(a + b\tau_{ab}) - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = 1,$$

что дает (с $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$)

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a\theta},$$

или

$$\boxed{\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}}. \quad (4.8)$$

Продифференцируем здесь по λ левую и правую части и положим $\lambda \downarrow 0$. Тогда найдем, что

$$\mathbb{E} \tau_{ab} = \frac{a}{|b|}.$$

Учитывая равенство

$$B_{\tau_{ab}} = a + b\tau_{ab} \quad \text{Р-п.н.}, \quad (4.9)$$

видим, что $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = a + b\mathbb{E} \tau_{ab} = a + b \cdot \frac{a}{|b|} = 0$.

Заметим, что обычно в традиционных доказательствах свойств моментов τ_{ab} сначала показывают, что $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$, а затем получают равенство $\mathbb{E} \tau_{ab} = a/|b|$.

Конечно, если нам известно *первое тождество Вальда* “ $\mathbb{E} \tau < \infty \Rightarrow \mathbb{E} B_\tau = 0$ ”, то свойство $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$ следует сразу из того, что $\mathbb{E} \tau_{ab} \leq a/|b| < \infty$.

Но можно предложить доказательство свойства $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$, не обращающееся к тождеству Вальда.

Действительно, рассмотрим для $\lambda > 0$ мартингал $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geq 0$. Из теоремы о преобразовании свободного выбора ($\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = 1$) и оценок $0 \leq e^{\lambda B_{t \wedge \tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge \tau_{ab})} \leq e^{\lambda a}$, учитывая, что $\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = 1$, находим

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} = 1.$$

Дифференцирование по λ дает

$$\mathbb{E} (B_{\tau_{ab}} - \lambda \tau_{ab}) e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} = 0. \quad (4.10)$$

(Заметим, что $\mathbb{E} |B_{\tau_{ab}} - \lambda \tau_{ab}| e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} \leq \mathbb{E} |a + (b - \lambda)\tau_{ab}| e^{\lambda a} < \infty$, поскольку $\mathbb{E} \tau_{ab} < \infty$.) Переходя в (4.10) к пределу при $\lambda \downarrow 0$, получаем, что $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$. Отсюда и из (4.9) следует $\mathbb{E} \tau_{ab} = a/|b|$.

3. Случай $b > 0$.

Рассмотрим мартингал $M_t = e^{\hat{\theta} B_t - \frac{\hat{\theta}^2}{2}t}$ с $\hat{\theta} = 2b$, $t \geq 0$. Для всех $t \geq 0$ таких, что $B_t \leq a + bt$, имеем

$$0 \leq e^{\hat{\theta} B_t - \frac{\hat{\theta}^2}{2}t} \leq e^{2ab}. \quad (4.11)$$

По теореме о преобразовании свободного выбора (раздел А в § 1),

$$\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = 1,$$

где

$$\begin{aligned} M_{t \wedge \tau_{ab}} &= I(\tau_{ab} < \infty) e^{2bB_{t \wedge \tau_{ab}} - \frac{(2b)^2}{2}(t \wedge \tau_{ab})} \\ &\quad + I(\tau_{ab} = \infty) e^{2bB_t - \frac{(2b)^2}{2}t}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.11), по теореме о мажорируемой сходимости, получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = \mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{2bB_{\tau_{ab}} - \frac{(2b)^2}{2}\tau_{ab}} \\ &= \mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{2ab} = e^{2ab} \mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty), \end{aligned}$$

что дает

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}}. \quad (4.12)$$

Покажем теперь, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}.$$

Для этого заметим, что в случае $b > 0$ $\mathbb{P}(\tau_{ab} = \infty) > 0$, и, аналогично (4.7), находим, что для $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$

$$\mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = 1. \quad (4.13)$$

Учитывая то, что $B_{\tau_{ab}} = a + b\tau_{ab}$ на множестве $\{\tau_{ab} < \infty\}$, из (4.13) получаем, что для всякого $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a\theta} \quad (= e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}). \quad (4.14)$$

Полезно отметить, что при $\lambda > 0$ на множестве $\{\tau_{ab} = \infty\}$, очевидно, выполнено свойство $e^{-\lambda \tau_{ab}} = 0$. Таким образом, из (4.14) получаем, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a\theta} \quad (= e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}). \quad (4.15)$$

Другими словами, в обоих случаях $b \leq 0$ и $b > 0$ преобразование Лапласа $\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}}$ при $\lambda > 0$ задается одной и той же формулой (4.15).

4. Наконец, докажем формулу

$$p_{\tau_{ab}}(b) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt), \quad 0 \leq t < \infty$$

(для обоих случаев $b \leq 0$ и $b > 0$). Для этого достаточно проверить, что

$$\int_0^\infty \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt) e^{-\lambda t} dt = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}$$

или, подробнее, что

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{a}{t} e^{-\frac{(a+bt)^2}{2t}} e^{-\lambda t} dt = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}. \quad (4.16)$$

Левая часть (LS) в (4.16) равна

$$(\text{LS}) = e^{-ab} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{a}{t} e^{\frac{a^2}{2t}} e^{-(\lambda + \frac{b^2}{2})t} dt.$$

Мы знаем (см. § 2), что для любого $\Lambda > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{a}{t} e^{-\frac{a^2}{2t}} e^{-\Lambda t} dt = e^{-a\sqrt{2\Lambda}}.$$

Беря здесь $\Lambda = \lambda + b^2/2$, получаем, что

$$(\text{LS}) = e^{-ab} e^{-a\sqrt{2(\lambda + \frac{b^2}{2})}} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})},$$

что совпадает с правой частью (4.16).

Имея установленную формулу $p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt)$, непосредственным интегрированием находим, что

$$P(\tau_{ab} \leq t) = \int_0^t p_{\tau_{ab}}(s) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a + bt}{\sqrt{t}}\right) + e^{-2ab} \Phi\left(\frac{bt - a}{\sqrt{t}}\right). \quad (4.17)$$

Эта формула будет далее играть существенную роль в § 6.

5. Проиллюстрируем некоторые результаты о свойствах моментов остановки τ_a и τ_{ab} , которые могут быть получены непосредственно из теоремы Гирсанова.

(а) Для момента остановки

$$\tau_a = \inf\{t : B_t \geq a\}, \quad a > 0,$$

при любом $\lambda \geq 0$ имеем (см. § 2)

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = 1.$$

Отсюда для любого $\mu \leq 0$

$$\mathbb{E} e^{-\mu B_{\tau_a} - \frac{\mu^2}{2} \tau_a} = 1,$$

и процесс $\tilde{B}_t^\mu = B_t + \mu(t \wedge \tau_a)$ является (см. (1.42)–(1.44)) броуновским движением относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}_a$ такой, что $d\tilde{\mathbb{P}}_a = e^{-\mu B_{\tau_a} - \frac{\mu^2}{2} \tau_a} d\mathbb{P}$.

(b) Рассмотрим теперь момент остановки

$$\tau_{ab} = \inf\{t : B_t - bt \geq a\}.$$

Беря $\mu = -b$ с $b > 0$, из соотношений (1.48) и (2.4) получаем, что для $\lambda > 0$ и $b > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} &= \mathbb{E} \left[e^{b B_{\tau_a} - \frac{b^2}{2} \tau_a} e^{-\lambda \tau_a} \right] = e^{-ab} \mathbb{E} e^{-\left(\lambda + \frac{b^2}{2}\right) \tau_a} \\ &= e^{-ab} e^{-a \sqrt{2\left(\lambda + \frac{b^2}{2}\right)}} = e^{-a(b + \sqrt{2\lambda + b^2})} \end{aligned}$$

(ср. (4.15)).

Аналогичным образом находим, что для $b > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{ab} \leq t) &= \mathbb{E} I(\tau_{ab} \leq t) = \mathbb{E} e^{-b B_{\tau_a} - \frac{b^2}{2} \tau_a} I(\tau_a \leq t) \\ &= e^{-ab} \mathbb{E} e^{-\frac{b^2}{2} \tau_a} I(\tau_a \leq t) \\ &= e^{-ab} \int_0^t e^{-a \frac{b^2}{2} s} \frac{a}{s} \varphi_s(a) ds \\ &= e^{-ab} \int_0^t \frac{a}{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{b^2}{2} s - \frac{a^2}{2s}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{a}{s^{3/2}} e^{-\frac{(a+bs)^2}{2s}} ds, \end{aligned}$$

что дает уже найденную ранее (п. 4) формулу

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\tau_{ab} \leq t) = \frac{a\varphi_t(a+bt)}{t}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$P(\tau_{ab} < \infty) = e^{-ab} \int_0^\infty \frac{a}{t} \varphi_t(a) dt = e^{-ab-|ab|}.$$

Если $b > 0$ и $a > 0$, то

$$e^{-ab-|ab|} = e^{-2ab}.$$

Тем самым, в этом случае $P(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}$ (ср. (4.12)).

Если же $b < 0$ и $a > 0$, то

$$e^{-ab-|ab|} = 1$$

и $P(\tau_{ab} < \infty) = 1$, что было также уже установлено в п. 2.

Задачи (в связи с содержанием § 4).

1. Убедитесь в справедливости формулы (4.17).
2. В п. 5 (b) мы доказали формулу для преобразования Лапласа $E e^{-\lambda \tau_{ab}}$ при $b > 0$ с помощью теоремы Гирсанова. Исследуйте аналогичным методом случай $b < 0$.
3. Найдите формулу для $E \tau_{ab}^n$, $n \geq 1$, в случае $b < 0$.

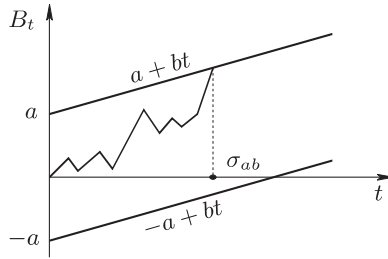
§ 5. Свойства момента остановки

$$\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0 : |B_t - bt| \geq a\}, \quad a > 0$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$P(\sigma_{ab} < \infty) = 1$$

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \sigma_{ab}} &= \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda + b^2})} \\ &= 2 \operatorname{ch}(ab) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda + b^2}} \end{aligned}$$



Для определенности будем предполагать, что $b > 0$. По аналогии с последним пунктом 5 в § 4, имеем

$$P(\sigma_{ab} < \infty) = E I(\sigma_{ab} < \infty) = E I(\sigma_a < \infty) e^{-bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a} = 1, \quad (5.1)$$

где $\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$. Сходным образом,

$$E e^{-\lambda \sigma_{ab}} = E e^{-\lambda \sigma_a} e^{-bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a} \quad (5.2)$$

и

$$E e^{-\lambda \sigma_{a,-b}} = E e^{-\lambda \sigma_a} e^{bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a}. \quad (5.3)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\operatorname{Law}(\sigma_{ab}) = \operatorname{Law}(\sigma_{a,-b})$$

и что (Р-п.н.) $(e^{bB_{\sigma_a}} + e^{-bB_{\sigma_a}})/2 = \text{ch}(ab)$, мы получаем из (5.2) и (5.3) соотношение

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_{ab}} = \mathbb{E} e^{-\sigma_a \left(\lambda + \frac{b^2}{2} \right)} \text{ch}(ab).$$

По формуле (3.4) имеем для $\lambda > 0$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_a} = \frac{1}{\text{ch}(a\sqrt{2\lambda})} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}. \quad (5.4)$$

Следовательно,

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_{ab}} = \frac{\text{ch}(ab)}{\text{ch}(a\sqrt{2\lambda + b^2})} \quad (5.5)$$

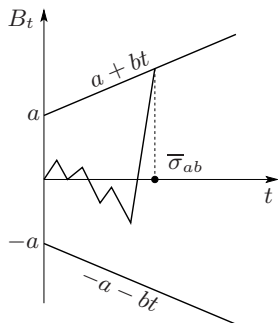
и, значит,

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_{ab}} = 2 \text{ch}(ab) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{(-1+2k)a\sqrt{2\lambda+b^2}}. \quad (5.6)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 5).

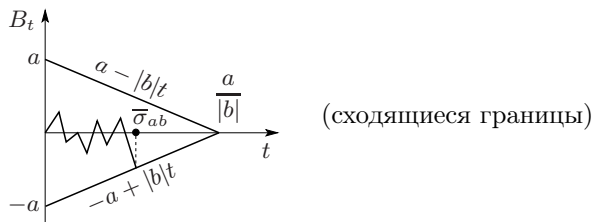
1. Найти формулы (аналогичные формулам для $p_{\sigma_a}(t)$ и $\mathbb{P}(\sigma_a \leq t)$ в § 3) для $p_{\sigma_{ab}}(t)$ и $\mathbb{P}(\sigma_{ab} \leq t)$.
2. Исследовать распределение момента остановки $\bar{\sigma}_{ab} = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a + bt\}$.

Случай $b > 0$, $a > 0$ проиллюстрирован на рисунке:



(расходящиеся границы)

Для $b < 0$, $a > 0$ картина такова:



ЗАМЕЧАНИЕ. Случай *расходящихся* границ был изучен в статье [7] также с помощью теоремы о преобразовании свободного выбора. При этом автор этой статьи отмечает, что его метод не работает для *сходящихся* границ. Весьма детальное исследование задач о пересечении границ броуновским движением для наклонных линий было проведено в большой статье [8]. Основные методы этой статьи основаны на принципах отражения и включения/исключения.

§ 6. О распределении $\sup B^\mu$ и $\sup |B^\mu|$ для броуновского движения B^μ со сносом

1. Пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ – броуновское движение со сносом: $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. По определению момента $\tau_{ab} = \inf\{t : B_t \geq a + bt\}$ находим, что

$$\{\tau_{ab} > t\} = \left\{ \sup_{s \leq t} (B_s - bs) < a \right\}. \quad (6.1)$$

Отсюда и из (4.17), полагая $\mu = -b$, получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s^\mu \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad (6.2)$$

и

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} (\sigma B_s + \mu s) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right). \quad (6.3)$$

Из формулы (6.2) видим, что

(а) если $\mu \geq 0$, то

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \leq x\right) = 0, \quad x \geq 0;$$

(б) если $\mu < 0$, то

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \leq x\right) = 1 - e^{-2|\mu|x}, \quad (6.4)$$

т.е.

$$\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{2|\mu|} \mathcal{E}, \quad (6.5)$$

где $\mathcal{E}$ – случайная величина со стандартным экспоненциальным распределением ($\mathbb{P}(\mathcal{E} \geq t) = e^{-t}$, $t \geq 0$).

2. Интересно, что результат (6.5) можно также быстро получить из следующего общего утверждения, которое, в свою очередь, является простым следствием теоремы о преобразовании свободного выбора.

ЛЕММА 1. Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – неотрицательный непрерывный мартингал такой, что $M_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$ с вероятностью единица и $M_0 = m > 0$ (m – константа). Тогда

$$\sup_{t \geq 0} M_t \stackrel{\text{law}}{=} \frac{m}{U}, \quad (6.6)$$

где $U = U[0, 1]$ – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : M_t \geq x\}$, $x > 0$. Тогда по теореме о преобразовании свободного выбора $\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_x} = m$, и, поскольку $0 \leq M_{t \wedge \tau_x} \leq x$, по теореме о мажорируемой сходимости находим, что

$$\begin{aligned} m &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \tau_x} = \mathbb{E}[I(\tau_x < \infty)M_{\tau_x}] + \mathbb{E}[I(\tau_x = \infty)M_\infty] \\ &= x \mathbb{P}(\tau_x < \infty) \end{aligned}$$

и, значит, для $x > 0$

$$\mathbb{P}(\tau_x < \infty) = \frac{m}{x}. \quad (6.7)$$

Поскольку $\{\tau_x < \infty\} = \{\sup_{t \geq 0} M_t \geq x\}$, из (6.7) получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} M_t \leq x\right) = 1 - \frac{m}{x} = \mathbb{P}\left(U \geq \frac{m}{x}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{m}{U} \leq x\right),$$

т.е. $\sup_{t \geq 0} M_t \stackrel{\text{law}}{=} m/U$. $\square$

Из этой леммы формулу (6.4) можно получить, используя следующее замечание.

Введем мартингал

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}, \quad t \geq 0,$$

где $\lambda = -2\mu > 0$. Это – непрерывный мартингал с $M_0 = 1$ и $M_\infty = 0$.

Из леммы выводим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} e^{-2\mu B_s - \frac{(2\mu)^2}{2}s} \leq e^{-2\mu}x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{e^{-2\mu x}} = 1 - e^{-2|\mu|x}, \end{aligned}$$

что и есть формула (6.4).

3. Теперь мы укажем другой метод отыскания распределения $\sup_{s \leq t} B_s^\mu$, $t \geq 0$, основанный на применении теоремы Гирсанова и принципа отражения для броуновского движения.

Из (1.34) имеем

$$P\left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu \leq x\right) = E e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} I\left(\sup_{t \leq T} B_t \leq x\right). \quad (6.8)$$

Отсюда видим, что для того чтобы найти распределение $\sup_{t \geq T} B_t^\mu$, надо знать *совместное* распределение пары случайных величин $(\sup_{t \leq T} B_t, B_T)$.

Используя принцип отражения (1.28a), находим, что для $x \geq y$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y\right) &= P(B_T \geq 2x - y) \\ &= P\left(B_1 \geq \frac{2x - y}{\sqrt{T}}\right) = \int_{\frac{2x - y}{\sqrt{T}}}^{\infty} \varphi(u) du, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Из (6.9) заключаем, что вектор $(\sup_{u \leq 1} B_u, B_1)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_{(\sup_{u \leq 1} B_u, B_1)}(x, y) = -2\varphi'(2x - y), \quad x \geq y \vee 0, \quad (6.10)$$

а $(\sup_{u \leq T} B_u, B_T)$ имеет плотность

$$f_{(\sup_{u \leq T} B_u, B_T)}(x, y) = -2\varphi'\left(\frac{2x - y}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geq y \vee 0. \quad (6.11)$$

Отсюда следует, что вектор $(\sup_{t \leq T} B_t, \sup_{t \leq T} B_t - B_T)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$g_{(\sup_{t \leq T} B_t, \sup_{t \leq T} B_t - B_T)}(x, y) = -2\varphi'\left(\frac{x + y}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (6.12)$$

Из этой формулы видим, что случайные величины $\sup_{t \leq T} B_t$ и $\sup_{t \leq T} B_t - B_T$ имеют *одну и ту же* плотность распределения, равную $2\varphi(x/\sqrt{T})$, которая, очевидно, совпадает с плотностью

распределения случайной величины $|B_T|$. Таким образом, для фиксированного T

$$\sup_{t \leq T} B_t \stackrel{\text{law}}{=} \sup_{t \leq T} B_t - B_T \stackrel{\text{law}}{=} |B_T|.$$

Имея совместную плотность

$$f_{(\sup_{t \leq T} B_t, B_T)}(x, y) = -2\varphi' \left(\frac{2x - y}{\sqrt{T}} \right), \quad x \geq y \vee 0,$$

из (6.8) непосредственным интегрированием получаем распределение вероятностей случайной величины $\sup_{t \leq T} B_t^\mu$:

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu \leq x \right) = \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \Phi \left(\frac{-x - \mu T}{\sqrt{T}} \right). \quad (6.13)$$

Интересно заметить, что для получения этой формулы не обязательно оперировать с “двумерным принципом отражения” (6.9). На самом деле достаточно лишь знать, что формула (6.9) справедлива для $y = x$. Действительно, из (1.34), (1.27) с $y = x$ и свойства $\tilde{B} \stackrel{\text{law}}{=} B$, где $\tilde{B}$ – отраженное броуновское движение (см. (1.22)), следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu \leq x \right) &= \mathbf{P}(B_T^\mu \leq x) - \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu > x, B_t^\mu \leq x \right) \\ &\stackrel{(1.34)}{=} \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - \mathbf{E} e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} I \left(\sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq x \right) \\ &\stackrel{(1.27)}{=} \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - \mathbf{E} e^{\mu(2x - \tilde{B}_T) - \frac{\mu^2}{2} T} I(\tilde{B}_T \geq x) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{E} e^{-\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} I(B_T \geq x) \\ &\stackrel{(1.34)}{=} \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{E} I(B_T^{-\mu} \geq x) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{P}(B_T \geq x + \mu T) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{P}(B_T \leq -x - \mu T) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \Phi \left(\frac{-x - \mu T}{\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 6).

1. Исследовать распределение момента остановки $\bar{\tau}_{ab} = \inf\{t : |B_t| \geq a + bt\}$.
2. Исследовать вопрос о распределении следующих векторных случайных величин:

$$\left(\sup_{t \leq T} |B_t|, B_T\right), \quad \left(\sup_{t \leq T} |B_t^\mu|, B_T^\mu\right)$$

и

$$\left(\sup_{t \leq T} B_t, \inf_{t \leq T} B_t, B_T\right), \quad \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu, \inf_{t \leq T} B_t^\mu, B_T^\mu\right).$$

§ 7. О распределении $\sup \hat{B}$ и $\sup |\hat{B}|$ для броуновского моста $\hat{B}$. Критерии Колмогорова и Смирнова

1. Совместное распределение вектора $(\sup B, B)$ было получено в § 6 на основании принципа отражения (см. (6.9), (6.10)). Сейчас мы укажем другой метод отыскания $\text{Law}(\sup B, B)$, основанный на приводимых ниже соображениях.

Чтобы найти совместное распределение вектора

$$\left(\sup_{s \leq 1} B_s, B_1 \right),$$

достаточно, конечно, знать *условное распределение*² (для $x \geq y \vee 0$)

$$\mathbf{P} \left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x \mid B_1 = y \right).$$

Это условное распределение, как нетрудно показать (задача 1), совпадает ($\mathbf{P}^{B_1}$ -п.н., где $\mathbf{P}^{B_1}(\cdot) = \mathbf{P}(B_1 \in \cdot)$) с распределением $\mathbf{P}(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x)$, где $\hat{B}^{0,y} = (\hat{B}_s^{0,y})_{s \leq 1}$ есть броуновский мост (из 0 в y):

$$\hat{B}_s^{0,y} = \hat{B}_s + sy, \quad (7.1)$$

а $\hat{B} = (\hat{B}_s)_{s \leq 1}$ — стандартный броуновский мост (из 0 в момент времени ноль в 0 в момент времени единица):

$$\hat{B}_s = B_s - sB_1, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (7.2)$$

Из (7.1) и (7.2) мы видим, что

$$\hat{B}_s^{0,y} = B_s + s(y - B_1). \quad (7.3)$$

Следующее замечание будет играть ключевую роль в наших последующих вычислениях: стандартный броуновский мост $\hat{B} = (\hat{B}_s)_{0 \leq s \leq 1}$ можно определить, отправляясь от некоторого броуновского движения $B = (B_s)_{0 \leq s < \infty}$, по формуле

$$\hat{B}_s = (1 - s)B_{\frac{s}{1-s}} \quad (7.4a)$$

²Заметим, что выражение $\mathbf{P}(\sup_{s \leq 1} B_s \in A \mid B_1 = y)$ есть всего лишь наглядное обозначение для функции $R(A; y)$ такой, что $R(A; B_1(\omega)) = \mathbf{P}(\sup_{s \leq 1} B_s \in A \mid \mathcal{F}^{B_1})(\omega)$ п.н., где $\mathcal{F}^{B_1}$ есть σ -алгебра, порожденная случайной величиной B_1 .

и, аналогично,

$$\hat{B}_s^{0,y} = \hat{B}_s + sy = (1-s)B_{\frac{s}{1-s}} + sy, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (7.4b)$$

(Для этого достаточно убедиться в том, что ковариационные функции процессов, стоящих в левых и правых частях этих соотношений, совпадают.)

Следовательно (с $t = \frac{s}{s-1}$, $s = \frac{t}{1+t}$, $1-s = \frac{1}{1+t}$), при $x \geq y$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right) &= P\left(\sup_{s \leq 1} [(1-s)B_{\frac{s}{1-s}} + sy] \leq x\right) \\ &= P\left(\sup_{t \geq 0} \left[\frac{1}{1+t}B_t + \frac{ty}{1+t}\right] \leq x\right) = P\left(\sup_{t \geq 0} \frac{B_t + ty}{1+t} \leq x\right) \\ &= P\left(\sup_{t \geq 0} \frac{t\left(\frac{B_t}{t} + y\right)}{1+t} \leq x\right) = P\left(\sup_{t \geq 0} \frac{\frac{B_t}{t} + y}{\frac{1}{t} + 1} \leq x\right) \\ &= P\left(\sup_{u \geq 0} \frac{uB_{1/u} + y}{u+1} \leq x\right) = P\left(\sup_{u \geq 0} \frac{B_u + y}{u+1}\right) \\ &= P(B_u + y \leq x(1+u) \text{ для всех } u \geq 0) \\ &= P(B_u + xu \leq xy \text{ для всех } u \geq 0) \\ &= P\left(\sup_{u \geq 0} (B_u - xu) \leq x - y\right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Мы знаем из (6.5), что для $x > 0$

$$\sup_{u \geq 0} (B_u - xu) \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{2x} \mathcal{E}, \quad (7.6)$$

где $\mathcal{E}$ – стандартная экспоненциально распределенная случайная величина.

Отсюда и из (7.5) получаем

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right) &= P\left(\frac{1}{2x} \mathcal{E} \leq x - y\right) \\ &= P\left(\frac{1}{2} \mathcal{E} \leq \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

и

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s \leq x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E} \leq x^2\right) = \mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} \leq x\right),$$

т.е.

$$\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s \stackrel{\text{law}}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} \quad (7.8)$$

или, более подробно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s \leq x\right) = 1 - e^{-2x^2}.$$

В математической статистике распределение для $\sup \hat{B}$ хорошо известно – это есть распределение в *критерии Смирнова*.

Из (7.7), учитывая, что, как было отмечено выше,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x \mid B_1 = y\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right),$$

находим:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \geq x, B_1 \leq y\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E} \geq \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-2(x - \frac{z}{2})^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}(z - 2x)^2} dz = \Phi(y - 2x). \end{aligned}$$

Отсюда (для $x \geq y \vee 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x, B_1 \leq y\right) &= \mathbf{P}(B_1 \leq y) - \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \geq x, B_1 \leq y\right) \\ &= \Phi(y) - \Phi(y - 2x), \end{aligned} \quad (7.9)$$

и, следовательно, совместная плотность вектора $(\sup_{s \leq 1} B_s, B_1)$ задается формулой

$$\begin{aligned} f_{(\sup_{s \leq 1} B_s, B_1)}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(y - 2x) \\ &= 2\varphi'(y - 2x) = -2\varphi'(2x - y), \end{aligned} \quad (7.10)$$

что совпадает с уже найденной ранее формулой (6.10).

2. Как было упомянуто выше, закон распределения $\sup_{s \leq 1} \widehat{B}_s$ связан с критерием Смирнова. Распределение для случайной величины $\sup_{s \leq 1} |\widehat{B}_s|$ связано с другим статистическим критерием – *критерием согласия Колмогорова*. Покажем, что *распределение Колмогорова*

$$K(x) \equiv \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq 1} |\widehat{B}_s| \leq x\right), \quad x \geq 0, \quad (7.11)$$

задается следующей формулой:

$$K(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 x^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}. \quad (7.12)$$

Аналогично (7.5) имеем

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq 1} |\widehat{B}_s^{0,y}| \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{u \geq 0} \left| \frac{B_u + y}{u + 1} \right| \leq x\right).$$

В частности, для $y = 0$ находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq 1} |\widehat{B}_s| \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{u \geq 0} \frac{|B_u|}{1 + u} \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}(|B_u| \leq x(1 + u) \text{ для всех } u \geq 0). \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$\gamma_x = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq x(1 + t)\}, \quad (7.13)$$

то

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq 1} |\widehat{B}_s| \leq x\right) = \mathbb{P}(\gamma_x = \infty). \quad (7.14)$$

Дадим мартингальное доказательство, основанное на теореме о преобразовании свободного выбора, того факта, что

$$\mathbb{P}(\gamma_x = \infty) = K(x), \quad (7.15)$$

где $K(x)$ задается формулой (7.12).

С этой целью рассмотрим мартингал

$$M_t = \frac{e^{\lambda B_t} + e^{-\lambda B_t}}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{2} t} \quad \left(= \text{ch}(\lambda B_t) e^{-\frac{\lambda^2}{2} t}\right). \quad (7.16)$$

По определению (7.13) момента γ_x

$$|B_{t \wedge \gamma_x}| \leq x(1 + t \wedge \gamma_x).$$

Учитывая оценку

$$\operatorname{ch} x \leq e^x, \quad x \geq 0,$$

получаем

$$M_{t \wedge \gamma_x} \leq e^{(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2})(t \wedge \gamma_x) + \lambda x}.$$

Если $\lambda \geq 2x$, то $\lambda x - \lambda^2/2 \leq 0$ и

$$0 \leq M_{t \wedge \gamma_x} \leq e^{\lambda x}.$$

Таким образом, мы можем применить теорему о преобразовании свободного выбора, которая дает

$$\mathbf{E} M_{t \wedge \gamma_x} = 1$$

для всех $t \geq 0$, и, следовательно,

$$1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} M_{t \wedge \gamma_x} = \mathbf{E} \left[I(\gamma_x < \infty) \operatorname{ch}(\lambda B_{\gamma_x}) \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} + I(\gamma_x = \infty) \cdot 0 \right],$$

т.е. для $\lambda \geq 2x$

$$\mathbf{E} \left[I(\gamma_x < \infty) \operatorname{ch}(\lambda B_{\gamma_x}) e^{-\frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} \right] = 1$$

или

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{\lambda x(1 + \gamma_x) - \frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} \right] \\ &= 2 - \mathbf{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{-\lambda x(1 + \gamma_x) - \frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} \right]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Возьмем здесь $\lambda = 2kx$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда находим, что

$$\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} \right) \gamma_x + \lambda x = 2kx^2(1 - k)\gamma_x + 2kx^2$$

и

$$\left(-\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} \right) \gamma_x - \lambda x = -2kx^2(1 + k)\gamma_x - 2kx^2.$$

Учитывая эти формулы, из (7.17) получаем, что

$$\begin{aligned} a_k &\equiv \mathbf{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{2k(1-k)x^2 \gamma_x} \right] \\ &= 2e^{-2kx^2} - e^{-4kx^2} \mathbf{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{-2k(1+k)x^2 \gamma_x} \right] \\ &= 2e^{-2kx^2} - e^{-4kx^2} a_{k+1}. \end{aligned}$$

Из этих рекуррентных соотношений следует, что

$$\begin{aligned} a_1 &= P(\gamma_x < \infty) = 2e^{-2x^2} - e^{-4x^2} a_2 \\ &= 2e^{-2x^2} - 2e^{-8x^2} + e^{-12x^2} a_3 = \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(\gamma_x < \infty) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 x^2}$$

и

$$\begin{aligned} K(x) &= P(\gamma_x = \infty) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 x^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $a > 0$, $b > 0$

$$\begin{aligned} P(|B_t| \leq at + b \text{ для всех } t \geq 0) \\ &= P(|B_t| \leq \sqrt{ab}(1+t) \text{ для всех } t \geq 0) \\ &= P(\gamma_{\sqrt{ab}} = \infty). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(|B_t| \leq at + b \text{ для всех } t \geq 0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 ab}. \end{aligned}$$

3. ЗАМЕЧАНИЕ 2. Кай-Лай Чжуном [9] сформулирован интересный вопрос: как увидеть, что функция

$$G(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 y}, \quad y \geq 0,$$

является функцией распределения? ($G(y)$ соотносится с $K(x)$ по очевидной формуле $G(2x^2) = K(x)$.) Его ответ на этот вопрос основывался на установленном им же равенстве

$$G(y) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_n}{n^2} \leq y\right),$$

где $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ – последовательность независимых одинаково экспоненциально распределенных случайных величин.

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 7).

1. Доказать, что для $x \geq y \vee 0$ (P^{B_1} -п.н., где $P^{B_1}(\cdot) = P(B_1 \in \cdot)$) справедливо равенство

$$P\left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x \mid B_1 = y\right) = P\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right).$$

2. Доказать (7.4a) и (7.4b).
3. Сравнить приведенное выше *мартингалльное* доказательство формул (7.11) и (7.12) с оригинальным доказательством Колмогорова [10] и доказательством Дуба [11], [12].
4. В дополнение к формулам для $K(x)$ в (7.12) доказать, что справедливо также представление

$$K(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \frac{x^2}{2}}$$

и что плотность $f_K(x)$ распределения $K = K(x)$ задается формулой

$$f_K(x) = 8x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-2k^2 x^2}.$$

§ 8. О фундаментальных тождествах Вальда для броуновского движения

1. Следующие три тождества Вальда играют важную роль во многих задачах математической статистики и теории вероятностей.

Если $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение и τ – момент остановки, то

$$\mathbb{E} \sqrt{\tau} < \infty \Rightarrow \mathbb{E} B_\tau = 0, \quad (8.1)$$

$$\mathbb{E} \tau < \infty \Rightarrow \mathbb{E} B_\tau^2 = \mathbb{E} \tau \quad (8.2)$$

и

$$\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2} \tau} < \infty \Rightarrow \mathbb{E} e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau} = 1. \quad (8.3)$$

(Условие $\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2} \tau} < \infty$ есть хорошо известное условие Новикова, а (8.3) – критерий Новикова.)

В разделе C §1 мы видели, что выполнение условия

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau} = 1$$

дает возможность построить новую вероятностную меру $\tilde{\mathbb{P}}$ с $d\tilde{\mathbb{P}} = Z_\tau(\lambda) d\mathbb{P}$, где $Z_\tau(\lambda) = e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau}$, такую, что процесс

$$\tilde{B}_t^\lambda = B_t - \lambda(t \wedge \tau)$$

является броуновским движением.

Стохастическая экспонента

$$Z_t(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$$

и ее обобщения для семимартингалов играют чрезвычайно важную роль в общем стохастическом исчислении (см. [4], [5]).

2. Мы сосредоточим сейчас наше внимание на доказательстве утверждения (8.3).

Введем следующие три условия:

$$\begin{aligned} \text{I}(\tfrac{1+\varepsilon}{2}; \lambda): & \quad \mathbb{E} e^{\frac{1+\varepsilon}{2} \lambda^2 \tau} < \infty, \quad \varepsilon > 0 \quad [5]; \\ \text{II}(\tfrac{1}{2}; \lambda): & \quad \mathbb{E} e^{\frac{1}{2} \lambda^2 \tau} < \infty \quad [13], \quad [14]; \\ \text{III}(\tfrac{1}{2}-; \lambda): & \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E} e^{(\frac{1}{2}-\varepsilon) \lambda^2 \tau} = 0 \quad [15], \quad [24]. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda\right) \Rightarrow \Pi\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) \Rightarrow \text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right),$$

и мы хотим показать, что самое слабое условие $\text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right)$ влечет свойство $E Z_\tau(\lambda) = 1$. Оказывается, что если доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\lambda > 0$

$$I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda\right): E e^{\frac{1+\varepsilon}{2} \lambda^2 \tau} < \infty \Rightarrow E Z_\tau(\lambda) = 1,$$

то тогда легко можно доказать, что

$$\Pi\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) \Rightarrow \text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right) \Rightarrow E Z_\tau(\lambda) = 1.$$

Чтобы доказать, что

$$I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda\right) \Rightarrow E Z_\tau(\lambda) = 1, \quad (8.4)$$

достаточно проверить, что для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_t E (Z_{t \wedge \tau}(\lambda))^{1+\delta} < \infty, \quad (8.5)$$

поскольку это условие (8.5) влечет равномерную интегрируемость семейства $\{Z_{t \wedge \tau}(\lambda), t \geq 0\}$, обеспечивающую требуемое равенство $E Z_\tau(\lambda) = 1$.

Чтобы доказать (8.5), запишем $(Z_t(\lambda))^{1+\delta}$ в следующем виде:

$$(Z_t(\lambda))^{1+\delta} = \Psi_t^{(1)} \cdot \Psi_t^{(2)} = e^{(1+\delta)B_t - \frac{p(1+\delta)^2}{2}t} \cdot e^{\frac{p(1+\delta)^2}{2}t - \frac{1+\delta}{2}t}. \quad (8.6)$$

Возьмем $p = 1 + \varepsilon$, $q = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$E (Z_t(\lambda))^{1+\delta} \leq [E(\Psi_t^{(1)})^p]^{1/p} \cdot [E(\Psi_t^{(2)})^q]^{1/q} = 1 \cdot [E(\Psi_t^{(2)})^q]^{1/q}.$$

Выберем теперь $\delta > 0$ такое, что для данного $0 < \varepsilon < 1$

$$\delta(1 + \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon)}.$$

Тогда

$$(\Psi_t^{(2)})^q \leq e^{(\frac{1}{2} + \varepsilon)t}.$$

Следовательно,

$$E(Z_{t \wedge \tau}(\lambda))^{1+\delta} \leq E e^{(\frac{1}{2} + \varepsilon)\tau} < \infty$$

и, значит, $1 = \lim_{t \rightarrow \infty} E Z_{t \wedge \tau}(\lambda) = E Z_\tau(\lambda)$.

Покажем теперь, что

$$\Pi\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) : \mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} Z_\tau(\lambda) = 1.$$

Возьмем $0 < \varepsilon < 1$ и $\lambda_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\lambda$. Для такого λ_ε

$$\mathbb{E} e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda_\varepsilon^2\tau} = \mathbb{E} e^{\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\tau} \leq \mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty.$$

Тогда из (8.4), применяя неравенство Гёльдера с $1/p = 1 - \varepsilon$, $1/q = \varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E} Z_\tau(\lambda_\varepsilon) = \mathbb{E} Z_\tau((1 - \varepsilon)\lambda) = \mathbb{E} e^{\lambda(1-\varepsilon)B_\tau - \frac{\lambda^2(1-\varepsilon)^2}{2}\tau} \\ &= \mathbb{E} e^{(1-\varepsilon)(\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau)} e^{\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon\lambda^2\tau}{2}} \leq [\mathbb{E} Z_\tau(\lambda)]^{1-\varepsilon} \left[\mathbb{E} e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon \\ &\leq [\mathbb{E} Z_\tau(\lambda)]^{1-\varepsilon} \left[\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Если $\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty$, то из (8.7) предельным переходом при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем, что $\mathbb{E} Z_\tau(\lambda) \geq 1$. Но, очевидно, $\mathbb{E} Z_\tau(\lambda) \leq 1$. Поэтому $\mathbb{E} Z_\tau(\lambda) = 1$.

Чтобы доказать, наконец, импликацию

$$\text{III}\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E} e^{\frac{1-\varepsilon}{2}\lambda^2\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} Z_\tau(\lambda) = 1, \quad (8.8)$$

достаточно заметить, что из соотношения

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau} = 0$$

или эквивалентного ему равенства

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon = 1$$

следует, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau} < \infty.$$

Отсюда для $\lambda_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\lambda$ получаем

$$\mathbb{E} e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda_\varepsilon^2\tau} = \mathbb{E} e^{\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\tau} = \mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}{2}\tau} < \infty.$$

Тем самым, мы можем использовать критерий $I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda_\varepsilon\right)$, который в силу (8.7) дает неравенство

$$1 \leq [E Z_\tau(\lambda)]^{1-\varepsilon} \left[E e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon. \quad (8.9)$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ и пользуясь свойством $\text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right)$: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln E e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} = 0$, находим, что $1 \geq E Z_\tau(\lambda)$. Вместе с очевидным неравенством $E Z_\tau(\lambda) \leq 1$ это дает требуемое равенство $E Z_\tau(\lambda) = 1$.

3. Во многих случаях (наряду с установленными критериями I, II и III) оказывается полезным критерий Казамаки (см., например, [16]):

$$\sup_{t \geq 0} E e^{\frac{1}{2} B_{t \wedge \tau}} < \infty \quad \Rightarrow \quad E e^{B_\tau - \frac{\tau}{2}} = 1. \quad (8.10)$$

Например, для $\tau = \tau_a$, где критерий Новикова (II) не работает (поскольку здесь $E e^{\frac{1}{2}\tau_a} = \infty$), критерий Казамаки применим, поскольку, очевидно, $E e^{\frac{1}{2} B_{t \wedge \tau_a}} \leq e^{\frac{a}{2}} < \infty$ для всех $t \geq 0$.

Задачи (в связи с содержанием § 8).

1. Дать доказательство первого (8.1) и второго (8.2) тождеств Вальда.
2. Доказать, что процесс $\tilde{B}^\lambda = (\tilde{B}_t^\lambda)_{t \geq 0}$ с $\tilde{B}_t^\lambda = B_t - \lambda(t \wedge \tau)$ является броуновским движением относительно меры $\tilde{P}$, где $d\tilde{P} = Z_\tau(\lambda) dP$.
3. Доказать (используя общую формулу Ито для семимартингалов), что стохастическая экспонента $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(X)_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет уравнению

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_{t-} dX_t.$$

(Определение стохастической экспоненты $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(X)_t)_{t \geq 0}$ и формулу Ито для семимартингалов можно найти, например, в [4], [5].)

4. Проанализировать доказательства критерия Новикова (8.3), приведенные в книгах [3], [5].
5. Доказать критерий Казамаки (8.10).
6. Доказать, что

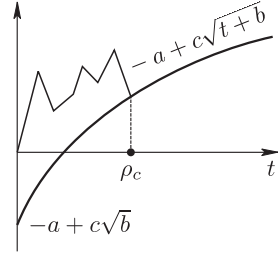
$$E e^{\frac{1}{2} B_{t \wedge \tau}} \leq [E e^{\frac{1}{2}\tau}]^2.$$

(Отсюда, следует, в частности, что критерий Казамаки слабее критерия Новикова.)

§ 9. Свойства момента остановки
 $\rho_c = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq -a + c\sqrt{t+b}\},$
 где $b \geq 0, a > c\sqrt{b}$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} P(\rho_c < \infty) &= 1 \\ E(\rho_c + b)^\nu &= \frac{H_\nu(a/\sqrt{b}) b^\nu}{H_\nu(c)} \\ &= \frac{D_{2\nu}(-a/\sqrt{b}) b^\nu e^{\frac{a^2 - c^2 b}{4b}}}{D_{2\nu}(-c)} \\ \operatorname{Re} \nu &< \nu(c) \end{aligned}$$



Здесь

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &\equiv \int_0^\infty e^{zt - \frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1} dt \\ &= D_{2\nu}(-z) e^{\frac{z^2}{4}} \Gamma(-2\nu), \quad \operatorname{Re} \nu < 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$D_\nu(z)$ есть функция параболического цилиндра порядка ν (см. [7, 9.241.2]) и $\nu(c)$ – первый положительный нуль функции $D_{2\nu}(-c)$.

Очевидно, что $\rho_c \leq \tau_c$ и поэтому $P(\rho_c < \infty) = 1$. Для $\lambda > 0$ мы также имеем, что $1 \geq E e^{\lambda B_{\rho_c} - \frac{\lambda^2}{2} \rho_c} \geq E e^{\lambda B_{\tau_c} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_c} = 1$. Следовательно,

$$E e^{\lambda B_{\rho_c} - \frac{\lambda^2}{2} \rho_c} = 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\rho_c < \infty$ (П-п.н.), получаем

$$E e^{\lambda(-a + c\sqrt{\rho_c + b}) - \frac{\lambda^2}{2} \rho_c} = 1$$

или

$$E e^{\lambda c\sqrt{\rho_c + b} - \frac{\lambda^2}{2}(\rho_c + b)} = e^{a\lambda - \frac{\lambda^2}{2}b}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\lambda^{-2\nu-1}$, $\operatorname{Re} \nu < 0$, и интегрируя по $d\lambda$, находим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty E e^{\lambda c\sqrt{\rho_c + b} - \frac{\lambda^2}{2}(\rho_c + b)} \cdot \lambda^{-2\nu-1} d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{a\lambda - \frac{\lambda^2}{2}} \cdot \lambda^{-2\nu-1} d\lambda = H_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) b^{-\nu}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где $H_\nu(z)$ определено в (9.1).

После замены переменных в первом интеграле в (9.2) получаем

$$H_\nu(c) \mathbb{E}(\rho_c + b)^\nu = H_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) b^\nu.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}(\rho_c + b)^\nu = \frac{H_\nu(a/\sqrt{b}) b^\nu}{H_\nu(c)}, \quad (9.3)$$

или (см. (9.1))

$$\mathbb{E}(\rho_c + b)^\nu = \frac{D_{2\nu}(-a/\sqrt{b}) b^\nu e^{\frac{a^2 - c^2 b}{4b}}}{D_{2\nu}(-c)} \quad (9.4)$$

для всех ν таких, что $\operatorname{Re} \nu < 0$. С помощью аналитического продолжения или используя функциональное соотношение

$$-2\nu H_\nu(z) \equiv \int_0^\infty e^{zt - t^2/2} (t - z) t^{-2\nu} dt = H_{\nu-1}(z) - z H_{\nu-1/2}(z), \quad (9.5)$$

устанавливаем, что эта формула остается справедливой для всех ν с $\operatorname{Re} \nu < \nu(c)$.

Более деликатный анализ показывает, что

$$P(\rho_c > t) \sim \frac{\text{const}}{t^{\nu(c)}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (9.6)$$

где $\nu(c)$ – непрерывная монотонная функция такая, что

$$\nu(-\infty) = 0, \quad \nu(0) = \frac{1}{2}, \quad \nu(1) = 1, \quad \nu(\infty) = \infty. \quad (9.7)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием §9).

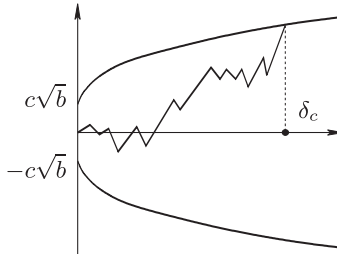
1. Доказать формулу (9.3) и (9.5).
2. Обосновать асимптотическое выражение (9.6).
3. Доказать непрерывность и монотонность функции $\nu(c)$ и установить свойства (9.7).
4. Ознакомиться со статьями [30], [31] и [14], посвященными исследованию свойств моментов ρ_c , и сравнить приведенные там доказательства свойства (9.4) с доказательством, данным в настоящем параграфе.

§ 10. Свойства момента остановки

$\delta_c = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq c\sqrt{t+b}\}, b > 0$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_c + b)^\nu &= \frac{b^\nu H_\nu(0)}{\frac{1}{2}(H_\nu(c) + H_\nu(-c))} \\ &= \frac{2b^\nu e^{-c^2/4}}{D_{2\nu}(-c) + D_{2\nu}(c)} \\ \operatorname{Re} \nu &< \nu^*(c) \end{aligned}$$



Здесь $\nu^*(c)$ – первый положительный корень уравнения $D_{2\nu}(-c) + D_{2\nu}(c) = 0$ (функции H_ν и $D_{2\nu}$ определены в §9).

Согласно определению (9.1),

$$H_\nu(z) = \int_0^\infty e^{zt - \frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1} dt. \quad (10.1)$$

Используя второе равенство в (9.1), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{ch}(zt) e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1} dt &= \frac{1}{2}(H_\nu(z) + H_\nu(-z)) \\ &= \frac{1}{2}(D_{2\nu}(z) + D_{2\nu}(-z)) e^{\frac{z^2}{4}} \Gamma(-2\nu), \quad \operatorname{Re} \nu < 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Аналогично случаю, рассмотренному в §9 для момента остановки ρ_c , получаем что для $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} \operatorname{ch}(\lambda \delta_c) e^{-\frac{\lambda^2}{2} \delta_c} = 1. \quad (10.3)$$

Тот же метод (умножения обеих частей на $\lambda^{-2\nu-1}$, $\operatorname{Re} \nu < 0$, и интегрирования по $d\lambda$), что и в §9, приводит к следующему выражению (ср. (9.3)):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_a + b)^\nu &= \frac{H_\nu(0)b^\nu}{\frac{1}{2}(H_\nu(c) + H_\nu(-c))} \\ &= \frac{2b^\nu e^{-c^2/4}}{D_{2\nu}(c) + D_{2\nu}(-c)}, \quad \operatorname{Re} \nu < \nu^*(c), \end{aligned} \quad (10.4)$$

где $\nu^*(c)$ – первый положительный корень уравнения $D_{2\nu}(c) + D_{2\nu}(-c) = 0$.

Функция $\nu^* = \nu^*(c)$ непрерывна и монотонна и

$$\nu^*(0) = \infty, \quad \nu^*(1) = 1, \quad \nu^*(\infty) = 0. \quad (10.5)$$

Можно показать, что

$$P(\delta_c > t) \sim \frac{\text{const}}{t^{\nu^*(c)}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (10.6)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 10).

1. Дать во всех подробностях доказательство формул (10.3), (10.4).
2. Доказать формулы (10.5) и (10.6).
3. Используя технику, примененную при изучении моментов ρ_c (§ 9) и δ_c (настоящий § 10), исследовать момент остановки

$$\Delta_c = \inf\{0 \leq t \leq 1 : |B_t| \geq c\sqrt{1-t}\}.$$

4. Ознакомиться с [32] и [14], где изучались свойства момента δ_c .

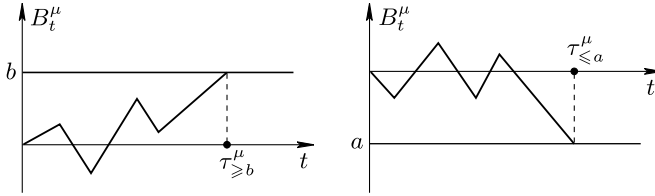
§ 11. Свойства моментов остановки

$$\tau_{\geq b}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \geq b\}, \quad \tau_{\leq a}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \leq a\}$$

и $\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu \wedge \tau_{\geq b}^\mu$, где $a < 0 < b$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ($\mu \geq 0$):

$$\begin{aligned} P(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) &= P(\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu) = \frac{1 - e^{-2\mu b}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \\ P(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) &= P(\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\geq b}^\mu) = \frac{e^{-2\mu a} - 1}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \\ E e^{-\lambda \tau_{a,b}^\mu} &= \frac{e^{\mu b} \operatorname{sh}(-a\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}) + e^{\mu a} \operatorname{sh}(b\sqrt{\mu^2 + 2\lambda})}{\operatorname{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}]} \end{aligned}$$



1. В § 2 для случая $\mu = 0$ было показано, что

$$P(\tau_{\leq a}^0 < \tau_{\geq b}^0) = P(\tau_{a,b}^0 = \tau_{\leq a}^0) = \frac{b}{b-a} \quad (11.1)$$

и

$$P(\tau_{\geq b}^0 < \tau_{\leq a}^0) = P(\tau_{a,b}^0 = \tau_{\geq b}^0) = \frac{|a|}{b-a} \quad (11.2)$$

(см. формулы (2.15) и (2.16), где $\tau_a = \tau_{\leq a}^0$ и $\tau_b = \tau_{\geq b}^0$).

Чтобы доказать соответствующие формулы для $P(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu)$ и $P(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu)$, рассмотрим мартингал

$$M_t = e^{\lambda(B_t^\mu - \mu t) - \frac{\lambda^2}{2}t}, \quad t \geq 0. \quad (11.3)$$

Положим $\lambda = -2\mu$. Тогда

$$M_t = e^{-2\mu B_t^\mu}, \quad t \geq 0.$$

Здесь $0 \leq M_{t \wedge \tau_{a,b}^\mu} \leq e^{2\mu a}$ для всех $t \geq 0$. По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$\mathbb{E} M_{\tau_{a,b}^\mu} = 1. \quad (11.4)$$

Обозначим

$$B = \{\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\geq b}^\mu\}, \quad A = \{\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1. \quad (11.5)$$

Тогда из (11.4) находим

$$1 = \mathbb{P}(B)e^{-2\mu b} + (1 - \mathbb{P}(B))e^{-2\mu a},$$

что дает для $\mathbb{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = \mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = \mathbb{P}(B)$ следующие формулы:

$$\mathbb{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = \frac{1 - e^{-2\mu b}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \quad (11.6)$$

и

$$\mathbb{P}(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = \frac{e^{-2\mu a} - 1}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}. \quad (11.7)$$

Заметим, что эти формулы могут быть записаны также в следующем виде:

$$\mathbb{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = e^{\mu a} \frac{\text{sh}(b\mu)}{\text{sh}[(b-a)\mu]} \quad (11.8)$$

и

$$\mathbb{P}(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = e^{\mu b} \frac{\text{sh}(-a\mu)}{\text{sh}[(b-a)\mu]}, \quad (11.9)$$

где $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

2. Рассмотрим сейчас преобразование Лапласа для величин $\tau_{\leq a}^\mu$, $\tau_{\geq b}^\mu$ и $\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu \wedge \tau_{\geq b}^\mu$. Из (11.4) следует, что для любого $\lambda \geq 0$ и $\tau = \tau_{a,b}^\mu$

$$\mathbb{E} e^{\lambda(B_\tau^\mu - \mu\tau) - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1 \quad (11.10)$$

и

$$\mathbb{E} e^{-\lambda(B_\tau^\mu - \mu\tau) - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1. \quad (11.11)$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda b - \tau(\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; B\right] + \mathbb{E}\left[e^{\lambda a - \tau(\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; A\right] = 1 \quad (11.12)$$

и

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda b - \tau(-\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; B\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\lambda a - \tau(-\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; A\right] = 1. \quad (11.13)$$

Для фиксированного $\theta > 0$ выберем $\lambda > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $\lambda\mu + \lambda^2/2 = \theta$. Ясно, что $\lambda = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta}$. Тогда из (11.12) получаем, что

$$e^{b(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B) + e^{a(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A) = 1. \quad (11.14)$$

Аналогичным образом, в (11.13) возьмем $\lambda > 0$ такое, что (для фиксированного $\theta > 0$) $-\lambda\mu + \lambda^2/2 = \theta$. Решая это квадратное уравнение, видим, что λ должно определять равенством $\lambda = \mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta}$. Таким образом, из (11.13) получаем

$$e^{b(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B) + e^{a(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A) = 1. \quad (11.15)$$

Из уравнений (11.14) и (11.15) находим $\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B)$ и $\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A)$:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B) = \mathbb{E}(e^{-\theta\tau_{\geq b}^{\mu}}; B) = e^{\mu b} \frac{\text{sh}[-a\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]} \quad (11.16)$$

и

$$\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A) = \mathbb{E}(e^{-\theta\tau_{\leq a}^{\mu}}; A) = e^{\mu a} \frac{\text{sh}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]} \quad (11.17)$$

Из этих формул, в свою очередь, следует (в силу определения множеств A и B и формул (11.8) и (11.9)), что

$$\mathbb{E}e^{-\theta\tau_{a,b}^{\mu}} = \frac{e^{\mu b} \text{sh}[-a\sqrt{\mu^2 + 2\theta}] + e^{\mu a} \text{sh}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}, \quad (11.18)$$

что и есть требуемая формула (с θ вместо λ).

3. Рассмотрим частный случай полученных формул с $a = -b$, $b > 0$. Из (11.18) имеем

$$\mathbb{E}e^{-\theta\tau_{-b,b}^{\mu}} = \frac{[e^{\mu b} + e^{-\mu b}] \text{sh}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[2b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}. \quad (11.19)$$

Поскольку $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)$, то

$$\mathbf{E} e^{-\theta \tau_{-b,b}^\mu} = \frac{\operatorname{ch}(\mu b)}{\operatorname{ch}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}. \quad (11.20)$$

Отметим, что эта формула была получена ранее в § 5, где мы рассматривали момент остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0 : |B_t - bt| \geq a\}$. В самом деле, согласно (5.5) (с $\lambda = \theta$),

$$\mathbf{E} e^{-\theta \sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}[a\sqrt{b^2 + 2\theta}]}. \quad (11.21)$$

Но если взять здесь $a = b$, $-b = \mu$, то мы получим

$$\sigma_{ab} = \sigma_{b,-\mu} = \tau_{-b,b}^\mu.$$

Таким образом, для $a = b$, $-b = \mu$ из (11.21) находим представление

$$\mathbf{E} e^{-\theta \sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(\mu b)}{\operatorname{ch}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}, \quad (11.22)$$

что совпадает с (11.20).

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 11).

1. Доказать справедливость соотношения (11.5).
2. Восстановить детали доказательств соотношений (11.16) и (11.17).
3. Используя формулу (11.9), показать, что если a фиксировано ($a < 0$) и $b \uparrow \infty$, то для $\mu > 0$

$$\lim_{b \uparrow \infty} \mathbf{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = \mathbf{P}\left(\inf_{t \geq 0} B_t^\mu < a\right) = e^{-2\mu|a|}.$$

Сравнить эту формулу с формулой (6.4).

4. Дать формулу для $\mathbf{E} \tau_{a,b}^\mu$.

§ 12. Свойства момента остановки

$$\tau^\mu(H) = \inf\{t \geq 0 : \max_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu \geq H\}$$

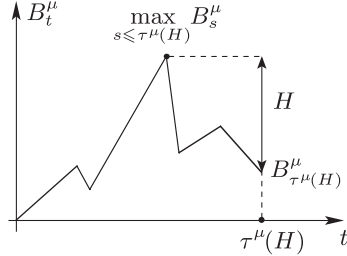
(связанного с падением B^μ на величину H , $H > 0$)

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

Для $\mu = 0$:

$$\mathbb{E} \tau^0(H) = H^2,$$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H)} = \frac{1}{\text{ch}(H\sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0$$



Для $\mu \neq 0$:

$$\mathbb{E} \tau^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2} (e^{2\mu H} - 1 - 2\mu H),$$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H)} = \frac{e^{-\mu H}}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\mu}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)}, \quad \Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}, \quad \lambda \geq 0$$

1. Момент остановки $\tau^\mu(H)$ — это момент первого падения (drawdown, downfall, ...) на величину H . В финансовой математике и финансовой инженерии *падение* на интервале $[0, t]$ определяется как изменение стоимости активов

- от достигнутого в прошлом пика до настоящего значения,
- от наивысшего уровня до наинизшего.

Момент $\tau^\mu(H)$ можно рассматривать как статистическую меру *риска* инвестирования в качестве альтернативы стандартным мерам риска, таким как вероятность возврата, V@R, Sharpe ratio и т.д. (см. [29]).

2. Случай $\mu = 0$ относительно прост для изучения, поскольку в силу (одномерной) *теоремы Леви* (о совместном распределении B и $\sup B$; см. формулу (1.51) в § 1, раздел D)

$$\max B - B^{\text{law}} \stackrel{\text{law}}{=} |B|,$$

т.е. $\text{Law}(\max_{s \leq t} B_s - B_t; t \geq 0) = \text{Law}(|B_t|; t \geq 0)$. Отсюда имеем

$$\text{Law}(\tau^0(H)) = \text{Law}(\sigma_H), \quad (12.1)$$

где $\sigma_H = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq H\}$.

Из § 3 (см. (3.4)) находим, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(H\sqrt{2\lambda})}. \quad (12.2)$$

Отсюда

$$\mathbb{E} \tau^0(H) = \mathbb{E} \sigma_H = H^2 \quad (12.3)$$

(ср. с (3.1) и (3.2)).

Из (12.2) получаем также, что

$$\mathbb{D} \tau^0(H) = \mathbb{D} \sigma_H = \frac{2}{3} H^4. \quad (12.4)$$

В силу (12.1) и свойства $\max B - B \stackrel{\text{law}}{=} |B|$ имеем также следующее свойство:

$$\mathbb{E} \max_{t \leq \tau^0(H)} B_t = \mathbb{E} |B_{\sigma_H}| = H. \quad (12.5)$$

3. Займемся теперь вопросом о *совместном распределении* $\operatorname{Law}(\tau^0(H), M_{\tau^0(H)})$, где $M_t = \max_{s \leq t} B_s$.

С этой целью заметим, что (на множестве $\{\tau^0(H) < \infty\}$)

$$M_{\tau^0(H)} = B_{\tau^0(H)} + H. \quad (12.6)$$

Поэтому знание закона $\operatorname{Law}(\tau^0(H), M_{\tau^0(H)})$ равносильно знанию закона $\operatorname{Law}(\tau^0(H), B_{\tau^0(H)})$.

Покажем, что для последнего распределения *двумерное преобразование Лапласа* (в предположении, что $\lambda \geq 0$, $\beta < \Delta \operatorname{cth}(\Delta \cdot H)$) выражается следующей формулой:

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta B_{\tau^0(H)}} = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}, \quad (12.7)$$

что в силу (12.6) эквивалентно формуле

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta M_{\tau^0(H)}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.8)$$

Кратчайший путь доказательства формулы (12.8) основан на приводимых ниже “марковских” соображениях.

Пусть $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение с отражением, выходящее из нуля [6], [16]. (Хорошо известно [6], [16], что такой процесс может быть реализован как модуль $|B|$ стандартного броуновского движения B .) Теорема Леви о совместном распределении B и $\sup B$ (см. раздел D в § 1) утверждает, что

$$(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (Y, L^0(Y)), \quad (12.9)$$

где $L^0(Y) = (L^0(Y)_t)_{t \geq 0}$ – локальное время процесса $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$. Если $\gamma^0(H) = \inf\{t \geq 0 : Y_t = H\}$, то из (12.9) получаем, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta M_{\tau^0(H)}} = \mathbb{E} e^{-\lambda \gamma^0(H) + \beta L^0(Y)_{\gamma^0(H)}}. \quad (12.10)$$

Чтобы вычислить преобразование Лапласа в правой части (12.10), воспользуемся методом *дифференциальных уравнений* из теории марковских процессов.

Будем рассматривать процесс Y , который начинается в произвольной точке $y \geq 0$ (а не в точке $y = 0$, как стандартное отраженное броуновское движение).

Обозначим

$$h(y) = \mathbb{E} \left(e^{-\lambda \gamma^0(H) + \beta L^0(Y)_{\gamma^0(H)}} \mid Y_0 = y \right). \quad (12.11)$$

Хорошо известно (см., например, [6], [16] или [17]), что

$$\frac{1}{2} h''(y) = \lambda h(y) \quad \text{при } 0 < y < H, \quad (12.12)$$

$$h'(0+) = -\beta h(0), \quad (12.13)$$

$$h(H) = 1. \quad (12.14)$$

Из (12.12) получаем

$$h(y) = c_1 \operatorname{ch}(\Delta \cdot y) + c_2 \operatorname{sh}(\Delta \cdot y), \quad (12.15)$$

где c_1 и c_2 – константы и $\Delta = +\sqrt{2\lambda}$.

Принимая во внимание условие (12.13), видим, что $h(y)$ можно переписать в следующем виде:

$$h(y) = (c \Delta) \operatorname{ch}(\Delta \cdot y) - (c \beta) \operatorname{sh}(\Delta \cdot y), \quad (12.16)$$

где c – константа.

Используя теперь условие (12.14), находим, что для всякого $\beta < \text{cth}(\Delta H)$

$$c = \frac{1}{\Delta \text{ch}(\Delta \cdot H) - \beta \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.17)$$

Следовательно, решение $h = h(y)$ задачи (12.12)–(12.14) определяется формулой

$$h(y) = \frac{\Delta \text{ch}(\Delta \cdot y) - \beta \text{sh}(\Delta \cdot y)}{\Delta \text{ch}(\Delta \cdot H) - \beta \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.18)$$

Для $y = 0$

$$h(0) = \frac{1}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.19)$$

Отсюда и из (12.10), (12.11) получаем преобразование Лапласа (12.8).

4. Рассмотрим теперь случай $\mu \neq 0$. Применяя теорему Гирсанова (см. (1.48)), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta B_{\tau^\mu(H)}^\mu} &= \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta B_{\tau^0(H)}^0} \cdot e^{\mu B_{\tau^0(H)}^0 - \frac{\mu^2}{2} \tau^0(H)} \right] \\ &= \mathbb{E} e^{-\left(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\right) \tau^0(H) + (\beta + \mu) B_{\tau^0(H)}^0}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Используя формулу (12.7), из (12.20) получаем, что если $\beta + \mu < \Delta \text{cth}(\Delta \cdot H)$, то

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta B_{\tau^\mu(H)}^\mu} = \frac{e^{-(\beta + \mu)H}}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta + \mu}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.21)$$

Отсюда, учитывая, что на множестве $\{\tau^\mu(H) < \infty\}$

$$M_{\tau^\mu(H)}^\mu = B_{\tau^\mu(H)}^\mu + H, \quad (12.22)$$

где $M_t^\mu = \max_{s \leq t} B_s^\mu$, приходим к следующей формуле:

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta M_{\tau^\mu(H)}^\mu} = \frac{e^{-\mu H}}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta + \mu}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)} \quad (12.23)$$

(напомним, что $\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}$).

Из этой формулы следует, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H)} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\mu}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}, \quad (12.24)$$

и, как следствие, получаем равенство

$$\mathbb{E} \tau^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2} (e^{2\mu H} - 1 - 2\mu H). \quad (12.25)$$

5. Полагая в (12.8) и (12.23) $\lambda = 0$, находим, что для $\theta > 0$

$$\mathbb{E} e^{-\theta M_{\tau^0(H)}} = \frac{1}{1 + \theta H} \quad (12.26)$$

и

$$\mathbb{E} e^{-\theta M_{\tau^\mu(H)}} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(|\mu|H) + \frac{\theta - \mu}{|\mu|} \operatorname{sh}(|\mu|H)}. \quad (12.27)$$

Из (12.26) следует, что случайная величина $M_{\tau^0(H)} (= B_{\tau^0(H)} + H)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $1/H$:

$$\operatorname{Law}(M_{\tau^0(H)}) = \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{H}\right), \quad (12.28)$$

т.е. плотность $p_{M_{\tau^0(H)}}(x)$ распределения вероятностей величины $M_{\tau^0(H)}$ дается формулой

$$p_{M_{\tau^0(H)}}(x) = \frac{1}{H} e^{-x/H}, \quad x \geq 0. \quad (12.29)$$

Несложными преобразованиями правую часть (12.27) можно привести к виду

$$\frac{1}{1 + \theta \cdot \frac{e^{2\mu H} - 1}{2\mu}}. \quad (12.30)$$

Таким образом, преобразование Лапласа случайной величины $M_{\tau^\mu(H)}$ можно записать как

$$\mathbb{E} e^{-\theta M_{\tau^\mu(H)}} = \frac{1}{1 + \theta \cdot \frac{e^{2\mu H} - 1}{2\mu}} \quad (12.31)$$

(для любого $\mu \in \mathbb{R}$). Отсюда следует, что $M_{\tau^\mu(H)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $2\mu/(e^{2\mu H} - 1)$:

$$\operatorname{Law}(M_{\tau^\mu(H)}) = \operatorname{Exp}\left(\frac{2\mu}{e^{2\mu H} - 1}\right). \quad (12.32)$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины $M_{\tau^\mu(H)}$ дается формулой (12.29), где вместо H надо взять $(e^{2\mu H} - 1)/2\mu$.

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием §12).

1. Убедиться в том, что для любого фиксированного $T > 0$

$$\max_{t \leq T} B_t \stackrel{\text{law}}{=} \max_{t \leq T} B_t - B_T \stackrel{\text{law}}{=} |B_T|.$$

Показать, что, вообще говоря, $\text{Law}(\max B) \neq \text{Law}(|B|)$.

2. Пусть

$$\sigma^\mu(H) = \inf \left\{ t \geq 0 : B_t^\mu - \min_{s \leq t} B_s^\mu \geq H \right\} \quad \text{и} \quad m_t^\mu = \min_{s \leq t} B_s^\mu.$$

По аналогии с формулами (12.21), (12.23) найти формулы для

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma^\mu(H) + \beta B_{\sigma^\mu(H)}^\mu}, \quad \mathbb{E} e^{-\lambda \sigma^\mu(H) + \beta m_{\sigma^\mu(H)}^\mu}.$$

Показать также, что

$$\mathbb{E} \sigma^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2} (e^{-2\mu H} - 1 + 2\mu H).$$

3. Как изменятся приведенные в этом параграфе формулы, если вместо процесса $B_t^\mu = \mu t + B_t$ рассматривать процесс $B_t^{\mu, \sigma} = \mu t + \sigma B_t$, $t \geq 0$?
4. Исследовать вопрос о структуре преобразований Лапласа для распределений вероятностей
 - (а) величин $(\tau^\mu(H), \sigma^\mu(H))$,
 - (б) величин $(M_{\tau^\mu(H)}^\mu, m_{\sigma^\mu(H)}^\mu)$ и
 - (с) четверки величин $(\tau^\mu(H), \sigma^\mu(H), M_{\tau^\mu(H)}^\mu, m_{\sigma^\mu(H)}^\mu)$.

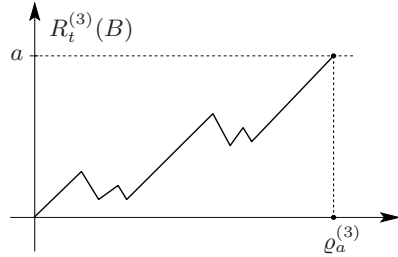
ЗАМЕЧАНИЕ. Более подробные сведения о моментах остановки $\tau^\mu(H)$ и $\sigma^\mu(H)$ можно найти в [18], [17], [19], [20].

§ 13. Свойства момента остановки

$\rho_a^{(3)} = \inf\{t \geq 0 : R_t^{(3)}(B) = a\}$, $a > 0$,
 где $R^{(3)}(B)$ – трехмерный процесс Бесселя
 $(R^{(3)}(B) = |B| + L(B))$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} P(\rho_a^{(3)} < \infty) &= 1 \\ E e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} &= \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})} \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$



1. Мы не раз обращались к теореме Леви (раздел D в §1) о том, что

$$(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B)), \quad (13.1)$$

где $L(B)$ – локальное время броуновского движения в нуле:

$$L_t(B) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds \quad \text{Р-п.н.} \quad (13.2)$$

(Заметим, что $L_t(B) = L_t(|B|)$.)

Из (13.1) получаем

$$2 \sup B - B \stackrel{\text{law}}{=} |B| + L(B) (= R^{(3)}(B)). \quad (13.3)$$

Оба процесса, $2 \sup B - B$ и $|B| + L(B)$, фигурирующие здесь, замечательны: они совпадают по распределению с трехмерным процессом Бесселя $R^{(3)} = (R_t^{(3)})_{t \geq 0}$, где

$$R_t^{(3)} = \sqrt{(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2 + (B_t^{(3)})^2} \quad (13.4)$$

и $B^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, – три независимых броуновских движения. (Иными словами, $R^{(3)}$ есть радиальная часть трехмерного броуновского движения.)

Существует и иное определение этого процесса, основанное на стохастических дифференциальных уравнениях.

Именно, рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + dB_t, \quad (13.5)$$

где B – броуновское движение и $R_0 = x \geq 0$. Это уравнение имеет единственное сильное решение (см., например, [16]), и если $R_0 = 0$, то

$$\text{Law}(R) = \text{Law}(R^{(3)}). \quad (13.6)$$

Доказательство свойства (13.6), а также упомянутого выше свойства

$$\text{Law}(R^{(3)}) = \text{Law}(|B| + L(B)) \quad (13.7)$$

приведено в [16], [22].

2. Сформулированное выше свойство $P(\rho_a^{(3)} < \infty) = 1$ следует из (13.7) и свойства $P(\sigma_a < \infty) = 1$, где $\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$ (см. § 3).

Обратимся теперь к доказательству формулы

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0, \quad (13.8)$$

или, эквивалентно, формулы

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2}{2} \rho_a^{(3)}} = \frac{a\lambda}{\text{sh}(a\lambda)}, \quad \lambda \geq 0 \quad (13.9)$$

(ср., между прочим, с (3.3)).

Для доказательства достаточно проверить, что процесс

$$M_t = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t} \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}, \quad t \geq 0, \quad (13.10)$$

где $R_t^{(3)}(B) = |B| + L(B)$, является *мартингалом*. Тогда из того, что семейство случайных величин $\{M_{t \wedge \rho_a^{(3)}}, t \geq 0\}$ равномерно интегрируемо, по теореме о преобразовании свободного выбора получим $\mathbb{E} M_{\rho_a^{(3)}} = 1$, что и приводит к формуле (13.9).

Без ограничения общности мы можем предполагать, что пространство элементарных исходов Ω есть пространство непрерывных функций $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$.

Обозначим через P_B и P_{B^λ} распределения броуновского движения $B = (B_t(\omega))_{t \geq 0}$ и броуновского движения со сносом $B^\lambda = (B_t^\lambda(\omega))_{t \geq 0}$, где $B_t(\omega) = \omega_t$ и $B_t^\lambda(\omega) = \lambda t + \omega_t$. Символы $P_{R^{(3)}(B)}$ и $P_{R^{(3)}(B^\lambda)}$ будут использоваться для обозначения образов мер P_B и P_{B^λ} при отображении

$$\omega \mapsto R^{(3)}(\omega) = (R_t^{(3)}(\omega))_{t \geq 0},$$

где $R_t^{(3)}(\omega) = |\omega_t| + L_t(\omega)$.

Положим также

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\omega_s, s \leq t) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_t^{R^{(3)}} = \sigma(R_s^{(3)}(\omega), s \leq t).$$

Легко проверить, что $(P_B\text{-п.н.})$ для всех $t \geq 0$

$$\frac{d(P_{R^{(3)}(B^\lambda)} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}})}{d(P_{R^{(3)}(B)} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}})}(R^{(3)}(B)) = \mathbb{E} \left[\frac{d(P_{B^\lambda} | \mathcal{F}_t)}{d(P_B | \mathcal{F}_t)}(B) \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right]. \quad (13.11)$$

Левая часть (13.11), очевидно, является мартингалом (обозначим его $Z_t(\lambda)$, $t \geq 0$). В правой части (13.11) имеем

$$\frac{d(P_{B^\lambda} | \mathcal{F}_t)}{d(P_B | \mathcal{F}_t)}(B) = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}. \quad (13.12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_t(\lambda) &= \mathbb{E} \left[e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right] \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \mathbb{E} \left[e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right]. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Покажем, что $(P_B\text{-п.н.})$

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right] = \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \quad (13.14)$$

Чтобы это доказать, заметим сначала, что поскольку

$$\text{Law}(B) = \text{Law}(-B),$$

то

$$\mathbb{E} [e^{\lambda B_t} | \mathcal{F}_t^{|B|}] = \frac{1}{2} (e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|}) \quad (= \text{ch}(\lambda |B_t|)), \quad (13.15)$$

где $\mathcal{F}_t^{|B|} = \sigma(|B_s|, s \leq t)$. Это соотношение в сочетании с включением $\mathcal{F}_t^{R(B)} \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|}$ (напомним, что $R(B) = |B| + L(B) = |B| + L(|B|)$), приводит к равенству

$$\mathbb{E} [e^{\lambda B_t} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}] = \frac{1}{2} \mathbb{E} [e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}]. \quad (13.16)$$

Теперь мы воспользуемся следующей замечательной теоремой Питмана (см. [21]), которая утверждает, что условное распределение $\text{Law}(|B_t| | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)})$ является *равномерным* на $[0, R_t^{(3)}(B)]$. Из этой теоремы следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbb{E} [e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}] \\ &= \frac{1}{2\lambda R_t^{(3)}(B)} [e^{\lambda R_t^{(3)}(B)} - e^{-\lambda R_t^{(3)}(B)}] \\ &= \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Отсюда и из (13.16) получаем требуемую формулу (13.14), с учетом которой из (13.13) находим, что

$$Z_t(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \quad (13.18)$$

Процесс $(Z_t(\lambda))_{t \geq 0}$ образует мартингал (это следует из (13.11)). Ясно (ввиду (13.10)), что $Z_t(\lambda) = M_t$. Таким образом, процесс $(M_t)_{t \geq 0}$, заданный формулой (13.10), является *мартингалом*, и поскольку, как уже отмечалось выше, семейство случайных величин $\{M_{t \wedge \rho_a^{(3)}}, t \geq 0\}$ равномерно интегрируемо, то по теореме о преобразовании свободного выбора получаем требуемую формулу

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})}.$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 13).

1. Вывести из (6.11) или (6.12) формулу для плотности

$$f_{(2 \sup_{u \leq T} B_u - B_T)}(x)$$

распределения вероятностей величины

$$R_T^{(3)}(B) \stackrel{\text{law}}{=} 2 \sup_{u \leq T} B_u - B_T.$$

2. Доказать, что

$$\text{Law}(R) = \text{Law}(R^{(3)}) = \text{Law}(R^{(3)}(B)).$$

(См. (13.6), (13.7).)

3. Имея преобразование Лапласа

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})},$$

найти формулу для плотности распределения вероятностей величины $\rho_a^{(3)}$.

Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев, *Вероятность*: в 2-х кн. *Вероятность-1, Вероятность-2*, МЦНМО, М., 2004.
- [2] А. Н. Ширяев, *Задачи по теории вероятностей*, МЦНМО, М., 2006.
- [3] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 1997 [MR 1464694](#), [Zbl 0892.60001](#).
- [4] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, т. 1, 2, Теория вероятностей и математическая статистика, **47**, **48**, Наука, М., 1994 [MR 1346769](#), [MR 0959133](#), [Zbl 0830.60025](#).
- [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1974 [MR 0474486](#), [Zbl 0279.60021](#).
- [6] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматгиз, М., 1963 [MR 0193670](#), [Zbl 0132.37701](#).
- [7] L. Barba Escribá, “A stopped Brownian motion formula with two sloping line boundaries”, *Ann. Probab.*, **15**:4 (1987), 1524–1526 [MR 905346](#), [Zbl 0636.60082](#).
- [8] T. W. Anderson, “A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size”, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 165–197 [MR 116441](#), [Zbl 0089.35501](#).
- [9] K. L. Chung, “A cluster of great formulas”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **39**:1–3 (1982), 65–67 [doi 10.1007/BF01895215](#), [MR 653674](#), [Zbl 0495.60020](#); Reprinted in: Kai Lai Chung, *Chance and choice (Memorabilia)*, World Scientific, Singapore, 2004, 133–135 [MR 2113168](#), [Zbl 1059.01017](#).
- [10] A. Kolmogoroff, “Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione”, *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **4**:1 (1933), 83–91 [Zbl 0006.17402](#); рус. пер.: А. Н. Колмогоров, “Об эмпирическом определении закона распределения”, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Наука, М., 1986, 134–141 [MR 0861120](#), [Zbl 0595.60001](#).
- [11] J. L. Doob, “Heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems”, *Ann. Math. Statist.*, **20** (1949), 393–403 [MR 30732](#), [Zbl 0035.08901](#).

- [12] M. D. Donsker, “Justification and extension of Doob’s heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems”, *Ann. Math. Statist.*, **23** (1952), 277–281 [MR 47288](#), [Zbl 0046.35103](#).
- [13] А. А. Новиков, “Об одном тождестве для стохастических интегралов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **17**:4 (1972), 761–765 [MR 0312567](#), [Zbl 0284.60054](#).
- [14] A. A. Novikov, *Martingales and stopping times with applications*, Notes of lectures in UTS (Sydney), ETH (Zürich), 2004.
- [15] J.-A. Yan, “A propos de l’intégrabilité uniforme des martingales exponentielles”, *Séminaire de Probabilités XVI* (1980/81), Lecture Notes in Math., **920**, Springer, Berlin–New York, 1982, 338–347 [doi 10.1007/BFb0092796](#), [MR 0658695](#), [Zbl 0484.60038](#).
- [16] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1994 [MR 1303781](#), [Zbl 0804.60001](#).
- [17] D. Williams, “On a stopped Brownian motion formula of H. M. Taylor”, *Séminaire de Probabilités X* (1974/75), Lecture Notes in Math., **511**, Springer, Berlin, 1976, 235–239 [doi 10.1007/BFb0101110](#), [MR 0461687](#), [Zbl 0368.60056](#).
- [18] H. M. Taylor, “A stopped Brownian motion formula”, *Ann. Probab.*, **3**:2 (1975), 234–246 [MR 0375486](#), [Zbl 0303.60072](#).
- [19] Р. Дуади, М. Йор, А. Н. Ширяев, “О вероятностных характеристиках величин “падения” в стандартном броуновском движении”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:1 (1999), 3–13 [MR 1751185](#), [Zbl 0959.60073](#).
- [20] I. Meilijson, “The time to a given drawdown in Brownian motion”, *Séminaire de Probabilités XXXVII*, Lecture Notes in Math., **1832**, Springer, Berlin, 2003, 94–108 [doi 10.1007/b94376](#), [MR 2053044](#), [Zbl 1041.60065](#).
- [21] L. W. Pitman, “One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process”, *Adv. Appl. Probab.*, **7**:3 (1975), 511–526 [doi 10.2307/1426125](#), [MR 375485](#), [Zbl 0332.60055](#).
- [22] H.-H. Kuo, *Introduction to stochastic integration*, Universitext, Springer, New York, 2006 [MR 2180429](#), [Zbl 1101.60001](#).
- [23] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.
- [24] N. V. Krylov, *Introduction to the theory of random processes*, Grad. Stud. Math., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002 [MR 1885884](#), [Zbl 1008.60001](#).

- [25] S.E. Graversen, A.N. Shiryaev, “An extension of P. Lévy’s distributional properties to the case of a Brownian motion with drift”, *Bernoulli*, **6**:4 (2000), 615–620 [doi 10.2307/3318509](#), [MR 1777686](#), [Zbl 0965.60077](#).
- [26] А. С. Черный, А. Н. Ширяев, “Некоторые свойства броуновского движения со сносом и обобщение одной теоремы П. Леви”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:2 (1999), 466–472 [MR 1751488](#), [Zbl 0974.60058](#).
- [27] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2003.
- [28] А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов: Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы для процессов Маркова*, Изд-во Киев. ун-та, Киев, 1961 [MR 0185619](#), [Zbl 0108.14804](#).
- [29] G. Szegő (ed.), *Risk measures for the 21st century*, Wiley, 2004.
- [30] L. Breiman, “First exit times from a square root boundary”, *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, CA, 1965/66), II: *Contributions to Probability Theory*, Part 2, Univ. California Press, Berkeley, CA, 1967, 9–16 [MR 212865](#), [Zbl 0241.60035](#).
- [31] А. А. Новиков, “О моментах остановки винеровского процесса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **16**:3 (1971), 458–465 [MR 0315798](#), [Zbl 0258.60037](#).
- [32] L. A. Shepp, “A first passage problem for the Wiener process”, *Ann. Math. Statist.*, **38** (1967), 1912–1914 [MR 217879](#), [Zbl 0178.19402](#).

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 8

Альберт Николаевич Ширяев

**О мартингалльных методах в задачах
о пересечении границ броуновским движением**

Компьютерная верстка: *О. Г. Мисюрина*

Сдано в набор 15.03.2007. Подписано в печать 07.06.2007.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 5. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН

Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: spm@mi.ras.ru